OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURAL
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER
HEINRICH BRANDT

SERIES PRIMA

OPERA MATHEMATICA

VOLUMEN SEXTUM DECIMUM SECTIO ALTERA

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETI

BASILEAE MCMXXXV

VENDITIONI EXPONUNT
B. G. TEUBNER LIPSIAE ET BEROLINI
ORELL FÜSSLI TURICI ET LIPSIAE

COMMENTATIONES ANALYTICAE

AD THEORIAM SERIERUM INFINITARUM PERTINENTES

VOLUMEN TERTIUM SECTIO ALTERA

EDIDIT

CARL BOEHM

AUCTORITATE ET IMPENSIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE

BASILEAE MCMXXXV

VENDITIONI EXPONUNT
B. G. TEUBNER LIPSIAE ET BEROLINI
ORELL FÜSSLI TURICI ET LIPSIAE

TYPIS EXCUSSIT B. G. TEUBNER LIPSIAE

ÜBERSICHT
ÜBER DIE BÄNDE 14, 15, 16, 16* DER ERSTEN SERIE

EINLEITUNG

In den Bänden 14, 15, 16, 16* der ersten Serie sind 82 Eulersche Abhandlung über unendliche Reihen, Produkte und Kettenbrüche vereinigt. Sie bilden zusammen m dem ersten Band von Eulers *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne 1748, *Ope omnia* I_8) einen der wichtigsten Ausschnitte aus Eulers Gesamtwerk. Einzelne jen 82 Abhandlungen stehen in enger Berührung mit gewissen Teilen der *Introductio* oder d *Institutiones calculi differentialis*[1]) (Petropoli 1755, *Opera omnia* I_{10}), weitaus die meist gehen über den Rahmen der *Introductio* hinaus und mehr als eine bildet den Ausgang punkt für sehr bedeutende Forschungen der späteren Zeit; es seien hier hervorgehobe die Theorie der Gammafunktion, die Ableitung der Funktionalgleichung der Riemannsch Zetafunktion und die Untersuchung der hypergeometrischen Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{1 \cdot 2\gamma(\gamma-1)} x^2 + \cdots$$

(Euler selbst verstand übrigens im Anschluß an Wallis unter *series hypergeometri* etwas ganz anderes; vgl. S. XL). Die geniale Herleitung der binomischen Reihe (in d

1) Der Hauptinhalt dessen, worüber im ersten Abschnitt dieser Übersicht berichtet wi findet sich auch sowohl in den *Institutiones calculi differentialis* wie auch mit Ausnahme d Eulerschen Summenformel in der *Introductio*. In diese hat Euler außerdem das Allgemei seiner Untersuchungen über Kettenbrüche aufgenommen (siehe diese Übersicht VI) und einig Besondere wie die Kettenbrüche für quadratische Irrationalitäten, für $\frac{1}{e-1}$ und den Brouncker*schen Kettenbruch für* $\frac{4}{\pi}$. *Für diesen einen einfachen Beweis zu finden und womöglich den u* bekannten Brounckerschen Beweis wiederzufinden, war immer wieder das Bemühen Eulers (v E 123, 522, 616, 745; *Opera omnia* I_{14}, p. 296 und 323; I_{15}, p. 325; I_{16}, p. 44; I_{16^*}, p. 1 und 186; ferner diese Übersicht S. LXXX und CI).

Abhandlung 465) hätte EULER wohl in seine *Introductio* aufgenommen, sow
CAUCHY in seine *Analyse algébrique* und ABEL in seine Untersuchungen üb
mialreihe aufgenommen hat[1]), wenn er sie zur Zeit, als er die *Introductio* s
besessen hätte.

Zweifellos ist der Gehalt der EULERschen Arbeiten über unendliche Algo
nicht ausgeschöpft, und es wäre für junge Forscher, die mit dem Rüstzeug
das wir den zwei Jahrhunderten seit EULERS Anfängen verdanken, eine lohne
EULERsches Gedankengut mit dem kritischen Geiste und den strengeren Verf
Zeit zu durchdringen und damit neu zu beleben. Mögen die Bände I_{14-16^*} der
solche Forschung anregen und erleichtern.

In der folgenden Übersicht betrachten wir die Abhandlungen der Bänd
16^* nicht in der Reihenfolge ihrer Entstehung, sondern teilen sie in sieben e
sprechende Gruppen, was natürlich nicht ohne Willkür möglich ist; viele der z
den Arbeiten gehören eigentlich mehreren jener Gruppen an und nicht wenig
in engem Zusammenhang mit Untersuchungen EULERS, die in anderen Bände
omnia, insbesondere in den Bänden I_{17-19} über Integralrechnung Platz finden

In die erste Gruppe haben wir 14 Abhandlungen (25, 41, 46, 47, 55, 61,
597, 617, 642, 664, 746) aufgenommen, in denen EULER zwei seiner Glanzleist
wieder von neuen Gesichtspunkten und in neuem Zusammenhang, manchmal al
lediglich wiederholend betrachtet, nämlich erstens seine Summenformel, die ma
Bezeichnung so schreibt[2]):

---

1) AUGUSTIN CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique, 1re P
algébrique*, Paris 1821; Oeuvres, série 2, tome 3. — NIELS HENRIK ABEL, Unters
die Reihe $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots$, Journal für die reine und angewandte Mat
1829, S. 31; Oeuvres, éd. SYLOW-LIE, Bd. 1, S. 219. — CAUCHYS *Analyse algébr*
EULERS *Introductio* nicht zu denken ist, hat für die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts
Bedeutung wie der erste Band der *Introductio* für die vorhergehenden Jahrzehnt
gleichen Stoffgebiete der erste große Fortschritt über die *Introductio* hinaus, und
in erster Linie in der schärferen Fassung der Begriffe, insbesondere auch des Konv
im Zusammenhang damit steht die unbedingte Ablehnung des Gebrauchs divergente
CAUCHY und dann auch durch ABEL in scharfem Gegensatz zur Auffassung EULERS
die Ausführungen auf S. XII—XIV dieses Berichts.

2) Die Summenformel hat bald nach EULER und zweifellos unabhängig von ih
MAC LAURIN gefunden: *A Treatise of fluxions*, Edinburgh 1742, art. 829, Bd. 2, p.
wie bei EULER als Beispiel die Summation der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ mit dem Erg
(vgl. (9a) S. XIX), doch erkennt MAC LAURIN nicht die Übereinstimmung mit $\frac{\pi^2}{6}$.

$$\int_a^{a+x} f(t)\,dt = x\,\frac{f(a+x)+f(a)}{2} - \frac{B_2 x^2}{2!}\,[f'(a+x)-f'(a)] - \frac{B_4 x^4}{4!}\,[f'''(a+x)-\ldots$$

(1)

$$\cdots - \frac{B_{2p-2}\,x^{2p-2}}{(2p-2)!}\,[f^{(2p-3)}(a+x) - f^{(2p-3)}(a)] + R$$

oder so:

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{f(a+nh)}{2}\right]$$

(2)

$$-\frac{B_2 h^2}{2!}\,[f'(a+nh)-f'(a)] - \frac{B_4 h^4}{4!}\,[f'''(a+nh)-f'''(a)]$$

$$\cdots - \frac{B_{2p-2}\,h^{2p-2}}{(2p-2)!}\,[f^{(2p-3)}(a+nh) - f^{(2p-3)}(a)] + R,$$

wobei R das Restglied bedeutet, dem man verschiedene Formen geben kann, und zw

die Summation der Reihen $s_{2k} = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2k}}$ mit dem Ergebnis

(3) $$s_{2k} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2\,(2k)!}\,B_{2k}.$$

Die BERNOULLIschen Zahlen[1])

(4)

$$B_1 = -\frac{1}{2},\quad B_3 = B_5 = \cdots = B_{2k+1} = 0,$$

$$B_2 = \frac{1}{6},\quad B_4 = -\frac{1}{30},\quad B_6 = \frac{1}{42},\quad B_8 = -\frac{1}{30},\quad B_{10} = \frac{5}{66},\quad B_{12} = -\frac{691}{2730}\cdots$$

verbinden diese auf den ersten Blick scheinbar weit auseinander liegenden Gegenstän

---

Encyklopaedie der math. Wiss. (Bd. II 1, 1, Leipzig 1899—1916, S. 167) der Verfasser des Artikels II A 3 von „einer von MAC LAURIN gefundenen und gewöhnlich EULER zug benen Summenformel" spricht, so ist dies ganz abwegig, da zwei Abhandlungen EULER die Summenformel vor MAC LAURINS *Treatise* erschienen sind. Ob EULER die STIRLINGsche (JAMES STIRLING, *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serie finitarum*, London 1730, propositio 28, p. 129), die auf den Sonderfall $f(x) = \log x$ der S formel hinausläuft, vor seiner ersten i. J. 1732 der Petersburger Akademie vorgelegten lung über diese gekannt hat, läßt sich nicht feststellen.

1) Die ersten fünf von Null verschiedenen dieser Zahlen finden sich zuerst in *coniectandi* (Basel 1713) des JAKOB BERNOULLI S. 98. Die Bezeichnungsweise ist schwank nennt EULER (z. B. I 15, p. 93) und viele andere nach seinem Vorgang mit Außerachtlass $B_1 = \frac{1}{2}$ und $B_3 = B_5 = B_7 \cdots = 0$, sowie des Vorzeichens BERNOULLIsche ZAHLEN die fol

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ \frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ \frac{691}{2730},\ \cdots;$$

Es möge hier noch, um an späterer Stelle (S. XXVII) den Bericht über
sche Abhandlungen zu erleichtern, eine Formel Platz finden, die man erhi
Gleichung (2) für gerades $n = 2m$ und mit der Abkürzung $a + 2mh = b$ s

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(2m-1)h) + f(a+2$$

$$(2') \qquad = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{B_2 h}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4 h^3}{4!}[f'''(b) -$$

$$+ \cdots + \frac{B_{2p-2} h^{2p-3}}{(2p-2)!}[f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] + R$$

und sie von der gleichartigen Gleichung

$$2[f(a) + f(a+2h) + f(a+4h) + \cdots + f(a+(2m-2)h) + f(a+$$

$$(2'') \qquad = f(a) + f(b) + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{B_2 2^2 h}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4 2^4 h^3}{4!}[f'''(b)$$

$$+ \cdots + \frac{B_{2p-2} 2^{2p-2} h^{2p-3}}{(2p-2)!}[f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] + R'$$

abzieht. Man erhält so:

$$f(a) - f(a+h) + f(a+2h) - f(a+3h) + \cdots - f(a+(2m-1)h)$$

$$(2a) \qquad = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{B_2 h(2^2-1)}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4 h^3(2^4-1)}{4!}[f'''(b$$

$$+ \cdots + \frac{B_{2p-2} h^{2p-3}(2^{2p-2}-1)}{(2p-2)!}[f^{(2p-3)}(b) - f^{(2p-3)}(a)] +$$

Die zweite Gruppe, welcher die 10 Abhandlungen 19, 20, 43, 189, 190,
652, 661 angehören, enthält Arbeiten über die Gammafunktion[1]) und im An

---

gelegentlich (*Opera omnia* I₁₆, p. 598) die folgenden:

$$\frac{3}{6}, \quad \frac{5}{30}, \quad \frac{7}{42}, \quad \frac{9}{30}, \quad \frac{11\cdot 5}{66}, \quad \frac{13\cdot 691}{2730}, \quad \ldots$$

an anderer Stelle (I₁₆, p. 56) wieder die hieraus durch Verdoppelung entstehende
Anmerkung 3 auf S. 92 von Bd. I₁₆, der noch der Hinweis auf Sserebrenniko
Abhandlungen (8) Bd. 16, Nr. 10, 1903 anzufügen ist, wo die ersten 90 von N
Bernoullischen Zahlen berechnet werden. Euler selbst hatte von den Zahlen B
berechnet (E 393, *Opera omnia* I₁₅, p. 93). Weitere Literatur bei Ely, *Amer*
Mathematics, Bd. 5, 1882, p. 228.

1) Wegen der Bezeichnung dieser Funktion siehe die Anmerkung 1 S. XI
p. LVIII—LXV.

Funktion, die von EULER durch Ausdehnung des Symbols $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ auf nicht ganzahlige Veränderliche, also durch Interpolation gewonnen wurde, die EULERschen Arbeit über Interpolation überhaupt. Außerdem ist eine Einzelschrift (nämlich 583) über die EULEsche Konstante, die er selbst meist C, gelegentlich auch O, Δ oder λ nannte, während heu *die Bezeichnung γ üblicher ist*[1]), in diese Gruppe aufgenommen wegen der Beziehung dies Konstanten zur Γ-Funktion. Die Abhandlungen dieser zweiten Gruppe überdecken sich te weise mit solchen der Bände I_{17-19} (Integrale). Die Trennung wurde so vorgenommen, d den Bänden 14, 15, 16, 16* die Abhandlungen zugewiesen wurden, die nicht im wesentlich mit bestimmten Integralen arbeiten, obwohl eine strenge Scheidung nicht möglich war.

In der dritten Gruppe werden 13 Arbeiten (128, 246, 447, 561, 562, 592, 636, 65 686, 703, 704, 747, 810) besprochen, die sich mit den trigonometrischen Funktionen u mit trigonometrischen Reihen beschäftigen, in der vierten Gruppe 9 Abhandlungen (46 575, 584, 637, 663, 709, 726, 743, 768) über die binomische Reihe und über Binomia koeffizienten.[2])

Die fünfte Gruppe enthält 17 Abhandlungen (72, 247, 326, 352, 432, 453, 477, 48 507, 551, 565, 616, 684, 685, 710, 722, 736), die verschiedenen anderen Funktionen u Reihen gewidmet sind.

In der sechsten Gruppe sind 11 Abhandlungen (71, 122, 123, 281, 522, 550, 55 593, 742, 745, 750) über unendliche Produkte und Kettenbrüche vereinigt.

Die siebente Gruppe endlich enthält 7 EULERsche Arbeiten (74, 125, 275, 280, 70 706, 809) über die Berechnung der Zahl π. Für die bekannten π-Berechner ADRIANI *ROMANUS*, *LUDOLF VAN CEULEN*, *ABRAHAM SHARP u. a.* (vgl. *Opera omnia* I_{14}, p. 245) kame die EULERschen Vorschriften freilich zu spät, ähnlich wie die besten Verfahren zur Berechnun der Logarithmen erst erfunden wurden, als die Tafeln im wesentlichen schon fertig waren.

Wir beendigen, indem wir an die zuletzt erwähnten Rechenarbeiten anknüpfen, die Einleitung mit einigen Bemerkungen über die wissenschaftsgeschichtliche Bedeutung der hi vorliegenden EULERschen Leistungen auf dem Gebiete der unendlichen Reihen, Produk

1) C in E 43, I_{14}, p. 94; E 583, I_{15}, p. 571 und in den *Inst. calc. diff.*, I_{10}, p. 33 *Const.* in E 47, I_{14}, p. 118; O in E 393, I_{15}, p. 115; Δ in E 368, I_{27}; λ in E 432, I_{15}, p. 13 Die Bezeichnung γ, die wir in dieser Übersicht benutzen, rührt von MASCHERONI her; siehe da über I_{10}, p. LXIV.

2) Wir bezeichnen den Koeffizienten von x^ν in der Potenzreihe für $(1+x)^\alpha$ mit $\binom{\alpha}{\nu}$ EULER schrieb $\left[\begin{matrix}\alpha \\ \nu\end{matrix}\right]$ (in E 575 und 584) und $\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)$ (in E 663, 709, 726, 768).

3) Die gegen Ende des 18. Jahrhunderts unter der Leitung PRONYS vorgenommene Ne berechnung der Tafeln („*Tables du Cadastre*", nicht gedruckt), wodurch es gelang, die letzte Fehler der alten Tafeln zu beseitigen, benutzt zur Berechnung der Primzahllogarithmen eine Reih die (man möchte sagen sonderbarer Weise) bei EULER nicht vorzukommen scheint. Auch die vi

und Kettenbrüche, wobei wir schon deswegen ganz im Allgemeinen verbleibe
wir den dann folgenden Einzelausführungen dieses Berichts nicht allzusehr vo

EULERS unermüdliche Freude am Zahlenrechnen war stets beherrscht danken, die Tragweite solcher Verfahren darzutun, die geeignet waren, die A ners durch die Überlegung des Mathematikers abzukürzen. Rechenfehler größ sind ihm selten unterlaufen; doch befolgt er nicht die strenge, erst später z Geltung gelangte Regel, daß der Fehler nicht mehr als eine halbe Einheit d beibehaltenen Stelle betragen darf.[1]) Bei den halbkonvergenten Reihen, di ausgiebig benutzte und die er auch in ihrer Wesensart richtig erkannte, sicherem Takt die Stelle, an der am günstigsten mit der Summation aufgehö war er sich wenigstens an Beispielen klar darüber, daß es sich um div handelt.[2]) Aber auch solchen divergenten Reihen, die keineswegs zur Klasse d genten gehören, kam nach seiner Auffassung, die sich freilich schon bei ei Zeitgenossen[3]) und erst recht später nicht durchsetzen konnte, ein bestimmt zu, den er durch folgende Festsetzung sicher stellen zu können glaubte: D unendlichen Reihe ist der Wert des endlichen Ausdrucks, durch dessen E Reihe entsteht.[4]) Diese Auffassung hat mit gehöriger Einschränkung hinte WEIERSTRASSschen Begriff der analytischen Fortsetzung einen bestimmten Sinn und damit eine gewisse Berechtigung erlangt. Nachdem man noc Jahrzehnten die EULERschen mit divergenten Reihen arbeitenden Ansätze rettungslos verfehlt angesehen hatte, braucht man heute nur manche seiner

weniger sinnvolle Berechnung der Zahl π auf 200 Dezimalstellen durch DASE (reine und angewandte Mathematik 27, 1844, S. 198) benutzt keine der von E handlung 809 (I_{16^*}, p. 267) besonders empfohlenen und wohl auch zweckmäßigste dern die ganz zum Gedankenkreise dieser Abhandlung gehörige, dort aber zufäll mende Formel

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

1) Oder mit den Worten von C. F. GAUSS (Werke Bd. 3, S. 237): „daß dem wahren Wert allemal so nahe kommen soll, als bei der gewählten Anza stellen möglich ist."

2) Vgl. S. XVII.

...dlung 245 *de seriebus divergentibus, Opera omnia* I_{14}, p. 5

... *Reihen*, Tübingen 1898, § 11.

... Male in einem Briefe an CHR. GOLDBACH vom 7. Augus ... *expressionis illius finitae, ex cuius evolutione illa serie* ... *de quelques célèbres géomètres du 18me siècle publiée* ... , p. 324); später fast wörtlich ebenso E 247, § 12 ((176).

etwas anders zu begründen, um ihnen einen guten Sinn zu geben. Die Anfänge der i diesem Jahrhundert weit entwickelten Theorie der divergenten Reihen, die ein Teil de Theorie der analytischen Fortsetzung ist und die schon sehr wichtige Ergebnisse erzie hat[1]), gehen also wie so viele Anfänge der heutigen Mathematik auf EULER zurück; es i freilich keineswegs so, als ob EULER hinterher gegen CAUCHY und ABEL recht behalte hätte.[2]) Seine vorhin erwähnte Definition der Reihensumme ist nicht nur, weil sie d Möglichkeit mehrdeutiger Funktionen keine Rechnung trägt[3]), sondern vor allem wegen d folgenden Mangels unhaltbar. Wenn die Reihenglieder reine Zahlen sind (und nicht Funk tionen einer Veränderlichen), wie im Falle

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \cdots, \tag{5}$$

so ist ein endlicher Ausdruck, durch dessen Entwicklung die Reihe entsteht, nicht eindeuti vorhanden. Ist z. B. die Summe der Reihe (5) der Wert, den die durch die Reihe

$$\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \tag{6}$$

definierte ganze transzendente Funktion von s für $s = -4$ annimmt, oder ist sie der Wer den die durch die Reihe

$$x - 2^4x^2 + 3^4x^3 - 4^4x^4 + \cdots \tag{7}$$

definierte rationale Funktion von x mit dem Nenner $(1+x)^6$ an der Stelle $x = 1$ annimm Daß diese beiden Werte miteinander übereinstimmen, ist ein beweisbarer merkwürdig Lehrsatz (vgl. S. LXXXII), der aber so lange nur wie ein zufälliges Ergebnis erschei als er nicht als Folge eines viel allgemeineren Lehrsatzes der Funktionenlehre erschloss werden kann, was zweifellos möglich ist. Durch einen solchen könnte wohl die EULERsc Definition für die Summe einer divergenten Reihe an Genauigkeit und Tragweite gewinn

Die Summen der Reihen

$$1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots \qquad (\text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

wovon (5) ein besonderer Fall ist, hat EULER unter Zugrundelegung der Definition

$$\lim_{x \to 1} (x - 2^k x^2 + 3^k x^3 - 4^k x^4 + \cdots) \tag{9}$$

mehrfach ermittelt; sein Ergebnis ist für $k > 0$

$$1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots = \frac{2^{k+1} - 1}{k+1} B_{k+1}.\text{[4]}) \tag{10}$$

1) Siehe z. B. K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 3. Aufl., Ber 1931, Kapitel XIII.

2) Vgl. die Anmerkung 1 S. VIII.

3) Welches ist z. B. nach EULER der Wert der Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ $x = 3$ oder $x = -3$?

4) Die Existenz des Grenzwerts (9) ist, da es sich um eine für $x = 1$ nicht unendl werdende rationale Funktion handelt, klar; um seinen Wert zu finden, ersetze man in (9) x du

Wenn EULER in der Behandlung allgemeiner Fragen der Konvergen Restabschätzung seiner Zeit nicht voraus war und wenn Bemerkungen, di der strengen von CAUCHY begründeten (*Analyse algébrique* 1821) und fün durch die Theorie der Irrationalzahlen (CANTOR, DEDEKIND, WEIERSTRAS gekommenen Grenzwerttheorie gedeutet werden können, bei ihm nur selte unbewiesen sind[1]), während uns viele andere seiner diesbezüglichen Erörteru unklar und unhaltbar erscheinen[2]), müssen wir bedenken, daß es eines u Jahrhunderts nach dem Erscheinen der ersten EULERschen Arbeiten bed diesen Fragen zu voller Klarheit zu gelangen, wie auch, daß er im geg Falle fast immer gefühlsmäßig das Richtige traf, schon weil er die Na Zahlenrechnung nie aus dem Auge verlor und ihm daher stets an Konv guter Konvergenz gelegen sein mußte, die er nötigenfalls durch Umfor

---

e^{-t} mit $t \to 0$, dann erhält man für $k > 0$ den mit $(-1)^{k+1}$ multiplizierten quotienten für $t \to 0$ der Funktion

$$e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t} - e^{-4t} + \cdots = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}} = -\sum_0^\infty \frac{2^{\nu+1}-1}{(\nu+1)!} B_{\nu+}$$

d. h. man erhält: $\dfrac{2^{k+1}-1}{k+1} B_{k+1}(-1)^{k+1}$. Das Ergebnis gilt auch für $k = 0$; man den Faktor $(-1)^{k+1}$ weglassen (vgl. (4) S. IX). Siehe K. KNOPP, *Theorie der unendlichen Reihen*, 2. Aufl., Berlin, S. 508. EULER gelangt zur Gleichung Wegen als den hier angegebenen; vgl. S. XXVIII und LXXXIII.

1) Z. B. läßt sich aus E 43 (*Opera omnia* I_{14}, p. 88 unten und 90 oben genz einer unendlichen Reihe folgende Beziehung zwischen den Teilsummen al hinreichende Bedingung herauslesen:

$$\lim_{i \to \infty} s_{ni} - s_i = 0 \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Da es sich dort um eine Reihe mit positiven Gliedern handelt, ist die Beding es geht zu weit, wenn R. REIFF (*Geschichte der unendlichen Reihen*, Tübingen 1 dieser vereinzelten, nicht scharf gefaßten und nicht bewiesenen Stelle EUL CAUCHYS in der Erfindung der allgemeinen Konvergenzbedingung angesehen wissen

2) Siehe beispielsweise E 247 (*de seriebus divergentibus*), § 8, I_{14}, p. 592. ohne Begründung gemachte Bemerkung, daß die divergente Reihe $\sum\limits_0^\infty a_\nu$ mit immer den Wert ∞ habe, wenn die a_ν unterhalb einer endlichen Schranke l richtigen Kern; doch genügt statt der Bedingung der Beschränktheit der a_ν $\overline{\lim\limits_{\nu \to \infty}} \sqrt[\nu]{a_\nu} = 1$; denn dann strebt die für $|x| < 1$ konvergente Reihe $\sum\limits_0^\infty a_\nu x^\nu$ für Viel stärker divergente Reihen haben dagegen nach EULER eine endliche Summ $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$, deren Summe $\dfrac{1}{1-2} = -1$ ist.

anderen kaum erreichter Geschicklichkeit herstellte. Allgemeine Prinzipien dagegen, abstrak Begriffsbildungen und logische Verfeinerungen waren seinem Wesen fremd. Ihn lockte d Einzelfall; neue Funktionen zu bilden und zu untersuchen war für ihn eine Lieblings aufgabe (vgl. das in der Abhandlung 565 aufgestellte Programm). Heutzutage lernt m ungeheuer viel Funktionentheorie, aber genau kennt man nur sehr wenige Funktionen, u das sind vor allem diejenigen, die EULER in seiner *Introductio* behandelt hat. Außerde kennen einige etwa noch die EULERsche Gammafunktion und die ebenfalls von EULER z erst untersuchte RIEMANNsche Zetafunktion. Und wenn jemand gar mit der hypergeometr schen Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ vertraut ist, so steht er gleichfalls auf EULERschem Bode Nur bei den elliptischen Funktionen hatte er trotz vieler Bemühungen kein Glück; ih Entdeckung mußte er seinen Nachfolgern überlassen. Aber sollte nicht sonst in EULE Arbeiten noch mancher Keim schlummern, der zu späterer Blüte berufen ist?

Bei den unendlichen Kettenbrüchen, deren erste zusammenfassende Darstellung u vielen Einzeluntersuchungen man ihm verdankt, kümmert sich EULER fast gar nicht u die Konvergenz.[1]) Diese Lücke auszufüllen, konnte nicht Aufgabe dieses Berichtes sein; e junger Forscher, der O. PERRONS *Lehre von den Kettenbrüchen* (Leipzig und Berlin 191 durchgearbeitet hat, mag in der Untersuchung von Zahlen und Funktionen, die EUL durch Kettenbrüche dargestellt hat, ein lohnendes Betätigungsfeld finden.

Der Leser der Abhandlungen wird selbst merken, wie EULERS mathematische D stellung und Ausdrucksweise die Schwerfälligkeit der Zeit vor ihm bald verliert und imm vollkommener wird. Daß der Gebrauch von *Indices* erst später allgemein wird, währe EULER für die Reihen $s_2, s_4, s_6, \ldots$ etwa $P', Q', R', \ldots$ (z. B. E 41) oder $\int \frac{1}{z^2}$ us (z. B. E 477) schreibt, mag vielleicht mit Schwierigkeiten des Drucks zusammenhängen. D Fortschritt in der mathematischen Ausdrucksweise, der seitdem über EULER hinaus erzi wurde, erscheint gering gegenüber dem Fortschritt, den die EULERschen Arbeiten über vorausgehende Zeit zeigen, wofür ihm zwar nicht das alleinige, aber doch das Hau verdienst zukommt.[2])

Um die Darstellung dieser Übersicht zu vereinfachen und leichter lesbar zu mache bedienen wir uns der heutigen Schreibweise von Ausdrücken und Formeln statt der EUL schen Bezeichnungen, die außerdem nicht einheitlich sind, sondern von einer Abhandlu zur andern wechseln.

---

1) Einfache Konvergenzüberlegungen finden sich in Abhandlung 281, § 34; *Opera om* I15, p. 48.

2) Vgl. EULERS Ausführungen über den Wert einer guten Bezeichnung in der Einleitu zur Abhandlung 246 (*Opera omnia* I11, p. 542).

I. DIE EULERSCHE SUMMENFORMEL.

DIE REIHEN $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2k}}$. DIE BERNOULLISCHEN Z

Die EULERsche Summenformel findet sich mit kaum angedeuteten
20. Juni 1732 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhandlung 25

Methodus generalis summandi progressiones

(*Opera omnia* I14, p. 42—72) unter folgender Form

$$s = \int t\,dn + \alpha t + \frac{\beta\,dt}{dn} + \frac{\gamma\,d^2 t}{dn^2} + \frac{\delta\,d^3 t}{dn^3} + \cdots, \tag{1}$$

wobei t das allgemeine (zum Index n gehörige) Glied einer Reihe, s
ersten Glieder bedeutet. Für die Koeffizienten α, β, γ, δ, ε werden Reku

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}, \quad \gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24},$$

(2)

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} +$$

angegeben, bis das Bildungsgesetz klar ist, das natürlich auf die allg
von S. XXI für die BERNOULLIschen Zahlen hinausläuft; es ergibt sich

$$\alpha = \frac{1}{2}(= -B_1), \quad \beta = \frac{1}{12}\left(= \frac{B_2}{2!}\right), \quad \gamma = 0\left(= \frac{B_3}{3!}\right.$$

(3)

$$\delta = \frac{1}{720}\left(= \frac{-B_4}{4!}\right), \quad \varepsilon = 0\left(= \frac{B_5}{5!}\right), \quad \zeta = \frac{1}{30240}\left(=\right.$$

Die Summenformel wird in den darauffolgenden Beispielen der A
ein einziges Mal verwendet. Die als Beispiele gebrachten Reihensumma
mehr im wesentlichen darauf, daß aus Reihen, deren Glieder Funktio
lichen und deren Summen bekannt sind, durch Multiplikation mit Poly

rentiation und Integration wieder Reihen mit angebbarer Summe gebildet werden, z. B. a der geometrischen Reihe, aus der Reihe für e^x usw.[1])

Ein Beispiel, nämlich EULERS Ansatz für die Integraldarstellung der Summe

$$\sum_{1}^{n} \frac{x^\nu}{(a\nu+b)^m}, \tag{4}$$

möge in dieser Übersicht genügen, ohne daß es einen vollen Begriff von EULERS Erfindung kraft geben könnte. Im Falle $m=1$ findet er, daß diese Summe gleich

$$\frac{1}{a}\, x^{-\frac{b}{a}} \int_0^x t^{\frac{b}{a}} \frac{(1-t^n)}{1-t}\, dt \tag{5}$$

ist, was man durch Differenzieren leicht bestätigt. Den EULERschen Ausdruck für (4) b beliebigen ganzzahligen $m>0$ findet man am einfachsten aus (5) durch m-maliges Diff renzieren nach b (EULER geht anders vor; die von ihm gefundene Summe für (4) ste I$_{14}$, S. 56). Wir heben noch den vereinfachten Fall $x=1$, $a=1$, $b=0$, $m=2$, $n=\infty$ hervo

$$-\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = \int_0^1 \frac{\log t}{1-t}\, dt, \tag{6}$$

weil wir mit dieser Formel zu einer Frage gelangen, welche die Mathematiker des 18. Jah hunderts (außer EULER insbesondere auch die Brüder JAKOB und JOHANN BERNOULLI) hohem Maße beschäftigt hat, nämlich zu der Frage[2]): Kann man den Wert der Reihe

$$s_2 = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \tag{7}$$

in einfacher Weise durch bekannte Größen ausdrücken? und weiter: Gelingt dies für d allgemeineren Reihen

$$s_n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^n} \qquad (n=2, 3, 4, 5, \ldots) \tag{8}$$

Ihre Beantwortung wurde zu einem der schönsten Triumphe EULERS.

---

1) Statt des Buchstabens e gebraucht hier EULER noch c; vgl. hierzu die Anmerkung S. 128 von Band I$_8$ und die Anmerkung zu S. 143 der Abhandlung 61 von I$_{14}$, der ersten Stel jenes Bandes, wo e in der üblichen Bedeutung benutzt wird. In der nämlichen Abhandlung führt EULER auch für den halben Umfang des Einheitskreises die Bezeichnung π ein, die si zum ersten Male 1706 bei W. JONES findet: *Synopsis Palmariorum Matheseos* S. 243.

2) Näheres siehe in dem I$_{14}$, S. 156—176 wieder abgedruckten Aufsatze P. STÄCKELS (a *Bibliotheca Mathematica* 8$_3$, 1907—1908, p. 37—54): *Eine vergessene Abhandlung LEONHA EULERS über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen*; vgl. auch die Anmerkun

Die Formel (6) findet sich schon in einer der Abhandlung 25 vo[...]
lich in der am 5. März 1731 der Akademie vorgelegten Abhandlung 20

De summatione innumerabilium progressionum

(*Opera omnia* I_{14}, p. 25—41); diese hat in Anlage und Inhalt vieles mit[...] scheidet sich von ihr durch die weniger vollkommene Darstellung und d[...] punkt: es wird dort die schon in der vorhergehenden Abhandlung 19[...] gestellt, für Summen wie z. B. (4) Ausdrücke zu finden, die (wie (5)) [...] zahliges n einen Sinn haben; deshalb wurde diese Abhandlung in die zw[...] polation usw.) der vorliegenden Übersicht aufgenommen. Sie ist aber fü[...] Gruppe zu besprechenden Reihen (8) insofern wichtig, als an ihrem En[...] der rechten Seite von (6) und damit die Reihe s_2 in (7) auf 6 Dezima[...] wird und zwar auf eine ausgezeichnete und sehr merkwürdige Weise. [...] der Art EULERS, einen Ausdruck $\left(\text{wie die Reihe } \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}\right)$, dessen Natur z[...] zur Aufgabe gesetzt hatte, zunächst zahlenmäßig zu untersuchen. Zur [...] mittels des Integrals auf der rechten Seite von (6) ging er nun so [...] dieses Integral in zwei:

$$-s_2 = \int_0^x \frac{\log t}{1-t}\,dt + \int_x^1 \frac{\log t}{1-t}\,dt,$$

wo x irgend eine Zahl zwischen 0 und 1 ist; in dem zweiten Integrale [...] stitution $t = 1 - \tau$ und erhielt mit $y = 1 - x$

$$\begin{aligned} s_2 &= -\int_0^x \frac{\log t}{1-t}\,dt + \int_0^y \frac{\log(1-\tau)}{-\tau}\,d\tau \\ &= -\sum_0^\infty \int_0^x t^\nu \log t\,dt + \sum_1^\infty \int_0^y \frac{\tau^{\nu-1}}{\nu}\,d\tau \\ &= \sum_1^\infty \left[-\frac{t^\nu}{\nu}\log t + \frac{t^\nu}{\nu^2}\right]_{t=0}^{t=x} + \sum_1^\infty \frac{y^\nu}{\nu^2} \\ &= \log(1-x)\log x + \sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu^2} + \sum_1^\infty \frac{y^\nu}{\nu^2}. \end{aligned}$$

---

zu S. 180 von Band I_8 und drei daselbst, wie auch in dem soeben erwähnte[...] satze angeführte Veröffentlichungen G. ENESTRÖMS, *Biblioth. Math.* 4_3, 18[...] p. 248; 7_3, 1906—1907, p. 126.

1) Danach ist die Angabe der Anmerkung 2, I_{14}, p. 162 des in der [...] merkung erwähnten STÄCKELschen Aufsatzes zu berichtigen und zu ergänze[...]

Wählt man hier, was am einfachsten ist, $x = y = \frac{1}{2}$, so findet man

$$s_2 = (\log 2)^2 + 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{4^2} + \cdots \tag{9}$$

Die nunmehr auf der rechten Seite stehende Reihe konvergiert recht gut, und l…
kann als bekannt angesehen werden. Als ermittelten Wert für s_2 gibt EULER[1])

$$s_2 = 1{,}644934; \tag{9a}$$

er ist einschließlich der letzten Stelle richtig. Benutzt man die von EULER erst in … Abhandlung 41 (siehe S. XXII der vorliegenden Übersicht) bewiesene Gleichung $s_2 =$ … so besagt (9), daß die Potenzreihe $\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu^2}$ für $x = \frac{1}{2}$ den Wert $\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2$ annim… hierauf ist EULER in späteren Arbeiten mehrfach zurückgekommen (siehe insbesondere E … *Opera omnia* I$_{16^*}$, p. 118).

Eine von der soeben besprochenen ganz verschiedene Berechnung der Reihe $s_2 = \sum_1^\infty$ … ebenfalls auf 6 Stellen, von denen aber 2 falsch sind, findet sich in der Abhandlung 4…

Methodus universalis serierum convergentium summas quam proxime inveniendi

(*Opera omnia* I$_{14}$, p. 101—107), die am 9. Juni 1735 der Petersburger Akademie vorge… wurde. Die Berechnung von s_2 ist dort ein Beispiel für die Anwendung einer von Eu… gefundenen Formel mechanischer Quadratur, die eine Verbesserung der Sehnentrapezmet… ist. Letztere ist identisch mit folgender Näherungsformel

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \int_1^{n+1} f(x)\,dx + \frac{f(1)}{2} - \frac{f(n+1)}{2}. \tag{10}$$

EULER verbessert unter der Voraussetzung $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ diese Näherung, … dem er rechts noch die Glieder

$$\frac{f(1) - f(2)}{12} - \frac{f(n+1) - f(n+2)}{12} \tag{11}$$

hinzufügt, und verwendet sie (ähnlich wie seine Summenformel) nicht sowohl, um da… (10) rechts stehende Integral wie vielmehr um die links stehende Summe zu berech…

1) Schon vorher hatte JAMES STIRLING 9 Stellen dieses Reihenwertes, wovon 8 richtig … mittels einer geistreichen Reihentransformation berechnet: *Methodus differentialis sive trac… de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, London 1730, p. 29. In dieser Schrift we… auch ähnliche Interpolationsaufgaben gelöst wie in den EULERschen Abhandlungen 19 un… (I$_{14}$, p. 1 und 25).

Steht links eine unendliche Reihe, so kommt natürlich nur das erste d

tionsglieder (11) in Betracht. Im Falle der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ berechnet Eu

liche Summe

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}=1,549768$$

und dann mit $f(\nu)=\frac{1}{(10+\nu)^2}$ nach (10), (11) näherungsweise den Rest

$$\frac{1}{11}+\frac{7}{12}\,\frac{1}{121}\;\cdot\;\frac{1}{12\cdot 144}.$$

Als weiteres Beispiel gibt Euler die ganz entsprechend durchgefüh

endlichen Summe $\sum_1^{1\,000\,000} \frac{1}{\nu}$, für die er den Wert 14,392669 findet.

Eine dritte von den beiden erwähnten völlig verschiedene Berec

summe $s_2=\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ findet man in der Abhandlung 47

Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino genera

(*Opera omnia* I_{14}, p. 108—123), die am 13. Oktober 1735 der Petersbur

gelegt wurde. In dieser gibt Euler zuerst eine formale Herleitung sein

lung 25 ohne Beweis mitgeteilten Summenformel. Er bedient sich zu

Taylorschen Reihe, die er unter Erwähnung Taylors und seiner *Meth*

durch Differenzenbildung gewinnt. Seine Schlußformel ist

$$(12)\qquad \begin{aligned} S = \int X\,dx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{dX}{2\cdot 3!\,dx} - \frac{d^3X}{6\cdot 5!\,dx^3} + \frac{d^5X}{6\cdot 7!\,dx^5} - \frac{3\,d^7X}{10\cdot 9!\,d} \\ - \frac{691\,d^{11}X}{210\cdot 13!\,dx^{11}} + \frac{35\,d^{13}X}{2\cdot 15!\,dx^{13}} - \frac{3617\,d^{15}X}{30\cdot 17!\,dx^{15}} + \cdots \end{aligned}$$

die in die Formel (2) von S. IX, abgesehen von dem bei Euler stets

übergeht, wenn man $X=f(x)$ mit $x=a+nh$ und $h=1$ setzt, unte

Summe $f(a)+f(a+1)+\cdots+f(a+n)$ versteht und in (12) für die

unteren Grenze a herrührenden Glieder eine passende Konstante hinzud

Für die Koeffizienten werden die nämlichen Formeln angegeben w

lung 25; vgl. S. XVI und nachher (16). Den Zusammenhang mit den Z

noullis erkennt Euler noch nicht. Es ist sogar zu vermuten, daß ih

in Basel erschienene *ars coniectandi* nicht bekannt war. Denn als erstes

mmenformel leitet er, ohne JAKOB BERNOULLI zu erwähnen, die sogenannten BERNOULLI-en Polynome ab:

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1} + \binom{n+1}{1}B_1x^n + \binom{n+1}{2}B_2x^{n-1} + \cdots + \binom{n+1}{n}B_nx\right]$$

symbolisch geschrieben

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}\left[(x+B)^{n+1} - B^{n+1}\right],$$

ch die im Falle eines ganzzahligen positiven x die Summen

$$0^n + 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (x-1)^n \qquad (x = 1, 2, 3, \ldots)$$

gestellt werden.[1] Bei EULER finden sich die BERNOULLIschen Polynome nicht in der emeinen Form (13), sondern mit ihren Zahlenkoeffizienten ausgeschrieben für $n = 1, 2, \ldots, 16$. $x = 1$ geht (14) in die von EULER immer wieder benutzte, aber im Grunde schon OB BERNOULLI[2]) und A. DE MOIVRE[3]) bekannte Rekursionsformel für die in der Sum-formel auftretenden Koeffizienten über

$$1 + \binom{n+1}{1}B_1 + \binom{n+1}{2}B_2 + \cdots + \binom{n+1}{n}B_n = 0,$$

symbolisch geschrieben

n) $$(B+1)^{n+1} - B^{n+1} = 0.$$

EULER und vor ihm wird die Formel nicht allgemein, sondern nur für die ersten te von n angeschrieben, bis ihr Bildungsgesetz klar ist; auch verwendet EULER in n frühern Arbeiten nicht die BERNOULLIschen Zahlen B_ν selbst, sondern die mit ihnen ach zusammenhängenden S. XVI genannten Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$)

Als weiteres Beispiel zu seiner Summenformel behandelt EULER in der Abhandlung 47 Summe

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

findet

$$S = \text{Const.} + \log x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6}$$

$$+ \frac{1}{240x^8} - \frac{1}{132x^{10}} + \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} + \text{etc.}$$

---

1) Ersetzt man in Formel (2) von S. XVI $f(a)$ durch a^n, a durch 0, h durch 1, n durch x, sofort sie den Ausdruck der Summe (15) durch die Funktion (13).

2) *Ars coniectandi*, Basel 1713, p. 97, 98. Daselbst auch Formel (13) allgemein und noch nders für $n = 1, 2, 3, \ldots, 10$.

3) *Miscellanea analytica*, London 1730, *Complementum* S. 19.

geübten Rechners von der rechts stehenden divergenten Reihe so viele Glieder
gerade für einen guten Näherungswert nötig sind; er erwähnt ausdrücklich (
Falle $x=1$), daß die Reihe nicht konvergent ist. (Definiert hatte EULER j
schon in der Abhandlung 20, über die S. XLV berichtet werden wird.) Es fol
handlung 47 noch die vorhin erwähnte dritte Berechnung der Reihe

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

von der 10 Glieder addiert werden und der Rest mittels der Summenformel abg

Das Ergebnis wird auf 20 Stellen genau angegeben, d. h. viel genauer,
gebene Rechnung es liefern konnte. Daraus darf man schließen, daß die Übe
mit $\frac{\pi^2}{6}$ EULER aufgefallen war, als er die Abhandlung 47 abfaßte.[2]) Bekann
erst in der Abhandlung 41, die $7^1/_2$ Wochen später als 47 der Petersburger A
gelegt worden ist. Gegen Schluß der Abhandlung 47 werden noch die Zahlenwe
Reihen $s_3 = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^3}$ und $s_4 = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^4}$ auf 15 Stellen (die alle bis auf die 3 l
richtig sind) mitgeteilt.

Die soeben genannte Abhandlung 41

De summis serierum reciprocarum

(*Opera omnia* I$_{14}$, p. 73—86) wird für die Geschichte der Mathematik merkw
als die, in der EULER den Lehrsatz, daß die Reihen

$$(8) \qquad s_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

für gerades n (>0) zu π^n in einem rationalen Verhältnis

$$(19) \qquad a_{2k} = \frac{s_{2k}}{\pi^{2k}}$$

(vgl. S. IX (3)) stehen, zum ersten Male veröffentlicht hat, und zwar mit ei
der zwar keinenfalls allen Anforderungen an Strenge (auch nicht denen der da

1) Sie sind alle richtig; der Wert, den EULER an späteren Stellen seiner W
ist gewöhnlich in der 16. Stelle falsch. Vgl. I$_{15}$, p. 115, Anmerkung.

2) Ob ihm diese Übereinstimmung schon bei Berechnung von s_2 in den Abh
und 25 aufgefallen war, ist zweifelhaft, zumal der in 25 mitgeteilte Wert in der 5.
falsch ist.

S. XXVI) entsprach, der aber leicht zu einem strengen ausgebaut werden konnte, was er im wesentlichen von EULER selbst geschehen ist (vgl. S. XXXII–XXXVII). Außer- zeigte EULER in der Abhandlung 41, daß die Reihen

$$\sigma_n = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \cdots$$

ungerades $n = 2k+1$ zu π^n in rationalem Verhältnis

$$b_{2k+1} = \frac{\sigma_{2k+1}}{\pi^{2k+1}}$$

n, und zwar ist

$$\sigma_{2k+1} = (-1)^k \frac{E_{2k}}{2^{2k+2}(2k)!}\pi^{2k+1},$$

die E_{2k} ganze Zahlen sind:

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385, \quad \ldots$$

nennt die E_ν EULERsche Zahlen und setzt noch $E_1 = E_3 = E_5 = \cdots = 0$. Die EULER- Zahlen kann man aus den Rekursionsformeln

$$(E+1)^n + (E-1)^n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

hnen, die sich sofort aus der erzeugenden Funktion

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{E_{2\nu}}{(2\nu)!} x^{2\nu}$$

en.[1]) Die Reihen

$$t_n = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots$$

en eng mit den Reihen s_n zusammen, da offenbar

$$s_n = t_n + \frac{1}{2^n}s_n, \quad \text{also} \quad t_n = \frac{2^n - 1}{2^n}s_n, \quad s_n = \frac{2^n}{2^n - 1}t_n$$

Es ist also nach Gleichung (3) von S. IX

$$t_{2k} = (-1)^{k-1}\frac{2^{2k}-1}{2\cdot(2k)!}\pi^{2k}B_{2k}.$$

R betrachtet in der Abhandlung 41 (indem er sich wegen der s_n auf den soeben fest-

1) Vgl. E 130, *Opera omnia* I 14, insbesondere p. 428; in E 41 kommen nur die gleich- die BERNOULLIschen und die EULERschen Zahlen enthaltenden Rekursionsformeln vor, von S. XXV die Rede ist.

(28) $$\tau_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{(-3)^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{(-7)^n} + \cdots$$

zu Grunde legt, aus der

(29) $$\tau_{2n+1} = \sigma_{2n+1}, \quad \tau_{2n} = t_{2n}$$

folgt.

Bei seinen Überlegungen, deren Ziel die Bestimmung der rati

(30) $$d_n = \frac{\tau_n}{\pi^n}$$

(also schließlich

(31) $$d_{2k} = (-1)^{k-1}\frac{2^{2k}-1}{2\cdot(2k)!}B_{2k}, \quad d_{2k+1} = (-1)^k \frac{E}{2^{2k+}}$$

ist, geht er davon aus, daß man durch die Koeffizienten eines Poly

(32) $$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

mit den Nullstellen x_ν die Potenzsummen

(33) $$S_1 = \sum \frac{1}{x_\nu}, \quad S_2 = \sum \frac{1}{x_\nu^2}, \quad S_3 = \sum \frac{1}{x_\nu^3}$$

in bekannter Weise ausdrückt[1]):

(34) $$S_1 = -c_1, \quad S_2 = -c_1 S_1 - 2c_2, \quad S_3 = -c_1 S_2 - c_2 S_1$$

EULER nimmt dieses Verfahren auch dann in Anspruch, wenn (32) e reihe ist, und schließt beispielsweise so:

Die Funktion

(35) $$1 - \frac{\sin x}{\sin \alpha} = 1 - \frac{x}{1!\sin\alpha} + \frac{x^3}{3!\sin\alpha} - \frac{x^5}{5!\sin\alpha} + \cdots$$

hat die Nullstellen[2])

(36) $$x_{2\nu} = \alpha + 2\nu\pi, \quad x_{2\nu+1} = \pi - \alpha + 2\nu\pi \quad (\nu =$$

also ist

(37) $$\begin{aligned} &1 - \frac{x}{1!\sin\alpha} + \frac{x^3}{3!\sin\alpha} - \frac{x^5}{5!\sin\alpha} + \cdots \\ &= \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\pi-\alpha}\right)\left(1+\frac{x}{\pi+\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi+\alpha}\right)\left(1+\right. \end{aligned}$$

---

1) Wegen der Entdeckungsgeschichte dieser sog. GIRARD-NEWTON Anmerkung zu S. 178 von I_8.

2) EULER schreibt in der Abhandlung 41 noch p für π; vgl. die Ar

l nach (34):

$$S_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi - \alpha} + \frac{1}{-\pi - \alpha} + \frac{1}{2\pi + \alpha} + \frac{1}{-2\pi + \alpha} + \cdots = \frac{1}{\sin \alpha},$$

$$S_2 = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\pi - \alpha)^2} + \frac{1}{(\pi + \alpha)^2} + \frac{1}{(2\pi + \alpha)^2} + \frac{1}{(-2\pi + \alpha)^2} + \cdots = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$S_3 = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{(\pi - \alpha)^3} + \frac{1}{(-\pi - \alpha)^3} + \frac{1}{(2\pi + \alpha)^3} + \frac{1}{(-2\pi + \alpha)^3} + \cdots = \frac{1}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Für einen späteren Zweck schreiben wir die erste dieser Formeln nochmals, wobei α durch $\frac{m\pi}{n}$ ersetzen (m, n seien ganze Zahlen > 0):

$$\frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n - m} - \frac{1}{n + m} - \frac{1}{2n - m} + \frac{1}{2n + m} + \cdots$$

Wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, werden die rechten Seiten der Gleichungen (38) rationale len; die Reihen (38) aber für die S_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) werden gleich

$$\frac{2}{\pi^\nu}\left(\frac{1}{1^\nu} + \frac{1}{(-3)^\nu} + \frac{1}{5^\nu} + \frac{1}{(-7)^\nu} + \cdots\right) = \frac{2\tau_\nu}{\pi^\nu} = 2d_\nu \text{ (vgl. (30))},$$

l die Formeln (34) liefern, wenn man für $S_1, S_2, S_3, \ldots$ diese Werte $2d_1, 2d_2, 2d_3, \ldots$ setzt, Rekursionsformeln für diese Koeffizienten, d. h. also (vgl. (31)) gemischte Rekur nsformeln für die EULERschen und die BERNOULLIschen Zahlen. EULER berechnet die len d_n für $n = 1, 2, 3, \ldots, 7$.

Indem er $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ wählt, findet er weitere Rei, wie

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots$$

.; er bemerkt, daß die erste dieser Reihen sich schon bei NEWTON findet.[1])

Gegen Schluß der Abhandlung benutzt er an Stelle von (37) den Ansatz

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2 \pi^2}\right),$$

die Reihen s_{2k} nochmals und ohne Berufung auf ihren Zusammenhang mit den t_{2k} $2k = 12$) zu summieren.

---

1) Siehe I_{14}, S. 82, Anmerkung.

Die Entdeckung

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

hatte EULER vor Drucklegung der Abhandlung 41 in einem nicht meh
DANIEL BERNOULLI mitgeteilt, der sie an seinen Vater JOHANN B
Dieser fand daraufhin, genau wie EULER, mittels der Reihe für $\frac{\sin x}{x}$ die
öffentlichte sie später (ohne EULER zu nennen) im vierten Bande se
In einem Briefe[2]) teilte er EULER am 2. April 1737 seine Herleitu
gleichzeitig Bedenken gegen deren Beweiskraft: man hätte vor allem b
die Funktion $\sin x$ keine imaginären Nullstellen hat. Später (nach dem
handlung 41) griff DANIEL BERNOULLI die Beweisführung EULERS noc
dem er erklärte, es sei grundsätzlich nicht erlaubt, mit Potenzreihen
zu rechnen; auf EULERS Weise könne man ebensogut beweisen, daß $\sum_1^\infty$
sei, sondern gleich $\frac{m^2 S^2}{6 n^4}$, wenn S der Umfang, m, n die Längen der gr
Achse irgendeiner Ellipse sind.[4])

Den Einwürfen trug EULER Rechnung in den Abhandlungen 63 u
Reihenfolge abgefaßt, in der umgekehrten aber gedruckt worden sind.

---

1) JOHANN BERNOULLI, *Opera omnia*, t. 4, Lausannae et Genevae 174

2) Vgl. die schon S. XVII erwähnte Abhandlung P. STÄCKELS in Ba

3) *Correspondance math. et phys.* II, p. 477; vgl. auch die in der vo
nannte Abhandlung STÄCKELS I14, S. 169.

4) Fällt nämlich die große Achse der Ellipse in die X-, die kleine in
ihre Bogenlänge, vom Punkt $x = \frac{m}{2}$, $y = 0$ ab bis zu einem willkürlich
so findet man nach einfacher Rechnung (bei passender Wahl des Vorzeichens
reihe von s:

$$y = s - \frac{2m^2}{3n^4} s^3 + \cdots$$

Dann kann man nach EULER so weiterschließen: Die Funktion $y:s$ hat d

$$s = \frac{\nu S}{2} \qquad (\nu =$$

es ist also

$$1 - \frac{2m^2}{3n^4} s^2 + \cdots = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{4s^2}{\nu^2 S^2}\right)$$

und daher

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = \frac{m^2 S^2}{6 n^4}.$$

gabe von ganz verschiedenen Seiten an und haben fast nichts miteinander gemein. Vo diesen beiden entstanden, aber nach ihnen veröffentlicht ist die ebenfalls hierher gehörig Abhandlung 130. Ehe wir über diese drei Abhandlungen, deren jede in ihrer Art bedeuten ist, berichten (und zwar in der Reihenfolge 130, 61, 63), gehen wir kurz auf den Inha der ihnen vorausgehenden Abhandlung 55 ein, sowie auf den einiger späterer Abhandlunge (617, 642, 746), die ebenso wie 55 vorzugsweise der Summenformel und nicht den Reihe s_{2n} gewidmet sind.

Die beiden Abhandlungen 55

Methodus series summandi ulterius promota

und 617

De summatione serierum, in quibus terminorum signa alternantur

(*Opera omnia* I_{14}, p. 124—137 und I_{16}, p. 47—78), die in einem Abstand von fast 40 Jahre am 17. September 1736 und am 22. Februar 1776 der Petersburger Akademie vorgeleg worden sind, dehnen die Summenformel auf endliche und unendliche Reihen mit abwechseln den Vorzeichen

$$f(a) - f(a+h) + f(a+2h) - f(a+3h) + f(a+4h) - \cdots \tag{42}$$

aus; vgl. die Herleitung S. X; Euler gibt sie in der im fünften Abschnitt dieses Bericht zu besprechenden Abhandlung 352, während er in 55 und 617 genau wie bei der erste Summenformel den Taylorschen Lehrsatz benutzt.

Außerdem gibt er in 55 und 617 noch eine Summenformel oder vielmehr eine Um formung für Potenzreihen

$$f(0) + f(1)\xi + f(2)\xi^2 + f(3)\xi^3 + \cdots \tag{43}$$

Er entwickelt jeden Koeffizienten $f(\nu)$ nach Potenzen von ν:

$$f(\nu) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\nu + \frac{f''(0)}{2!}\nu^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\nu^3 + \cdots$$

und erhält (43) in der Form

$$\begin{aligned} & f(0)(1+\xi+\xi^2+\cdots) + \frac{f'(0)}{1}(\xi+2\xi^2+3\xi^3+\cdots)+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\xi+2^n\xi^2+3^n\xi^3+\cdots)+\cdots \\ & = \frac{f(0)}{1-\xi} + \frac{f'(0)\xi}{(1-\xi)^2} + \frac{f''(0)(\xi^2+\xi)}{2!(1-\xi)^3} + \frac{f'''(0)(\xi^3+4\xi^2+\xi)}{3!(1-\xi)^4} + \cdots \end{aligned} \tag{43a}$$

Diese Umformung von (43) ist richtig, wenn $f(\nu)$ eine ganze rationale oder eine noch ge wissen Einschränkungen genügende ganze transzendente Funktion ist; es ergibt sich dann auf der rechten Seite von (43a) eine ganze Funktion von $\frac{1}{1-\xi}$. Euler fügt auf der rechten Seite von (43a) noch überflüssiger Weise + Const. hinzu.

Die Summenformel, die Euler für (42) gewinnt, stimmt unter Weglassung des Restgliede mit (2a) S. X überein. Für die auftretenden mit den Bernoullischen Zahlen verwandte

auf den Endwert $b = \infty$ bezieht, und faßt das Weggelassene in eine nicht näher
Konstante zusammen, die manchmal ohne rechte Begründung gleich Null angen

So findet er z. B.[1] in der vorhin erwähnten, im übrigen aber erst sp
sprechenden Abhandlung 352 im Falle $f(a+\nu h) = (a+\nu h)^m$

$$a^m - (a+h)^m + (a+2h)^m - (a+3h)^m + \cdots$$

$$= \frac{a^m}{2} - \frac{B_2 h(2^2-1) m a^{m-1}}{2!} - \frac{B_4 h^3 (2^4-1) m(m-1)(m-2) a^{m-3}}{4!}$$

$$- \frac{B_6 h^5 (2^6-1) m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) a^{m-5}}{6!} - \cdots - \frac{B_{m+1} h^m (2^m}{m+1}$$

und daraus für $a = 0$, $h = 1$

$$0^m - 1^m + 2^m - 3^m + 4^m - \cdots = - \frac{B_{m+1}(2^{m+1}-1)}{m+1}$$

in Übereinstimmung mit (10) S. XIII trotz der Fragwürdigkeit der vorstehende

Die Abhandlung 642 vom 18. März 1776

De singulari ratione differentiandi et integrandi, quae in summis serierum

(*Opera omnia* I16, p. 122—138) enthält nichts grundsätzlich Neues. Es wird gez
schon auf S. XXI dieser Übersicht erwähnten Polynome $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades
Gleichung

$$\frac{d\varphi_{n+1}(x)}{dx} = n\,\varphi_n(x)$$

genügen. (JAKOB BERNOULLI, den EULER auch hier nicht erwähnt, hat diese Gle
ausdrücklich aufgestellt.) Dann wird noch formal gezeigt, wie aus der Summ
die Funktion $f(x)$ die Summenformeln für die Funktionen $f'(x)$ und $\int f(x)\,dx$

Die Abhandlung 746 endlich vom 13. März 1780

Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas differentiales i

(*Opera omnia* I16*, p. 200—213) gibt einen Überblick über EULERS frühere Er
sichtlich seiner Summenformel in ihrem Zusammenhang mit den BERNOULLI
und den Reihensummen s_{2k}.

Nunmehr besprechen wir die schon S. XXVI/XXVII hervorgehobenen A
130, 61, 63, die zu EULERS wichtigsten über die Reihen s_n gehören.

---

1) E 352, § 7; *Opera omnia* I15, p. 76.

(*Opera omnia* I14, p. 407—462) bildet eine Fortsetzung und Ergänzung der besprochenen Abhandlung 41, der gegenüber sie zwar nicht hinsichtlich der Strenge, wohl aber im Formalen und in der Darstellung einen erheblichen Fortschritt bedeutet.

EULER geht wieder aus von der allgemeinen Gleichung (vgl. (32))

$$(44)\qquad 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \prod_1^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{x}{x_\nu}\right)$$

und von dem besonderen Falle (37) mit den dort daraus gezogenen Folgerungen, bemerkt aber dann folgendes: Wenn die Funktion (44) mit $f(x)$ bezeichnet und $f'(x) : f(x)$ in eine Potenzreihe entwickelt wird:

$$(45)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{x - x_\nu} = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots,$$

so ist

$$(46)\qquad k_n = \sum_1^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(-x_\nu)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Wieder wird wie in E 41 die Anwendung auf $f(x) = 1 - \sin x : \sin\alpha$ oder, da es bei der logarithmischen Differentiation auf einen konstanten Faktor nicht ankommt, auf $f(x) = \sin x - \sin\alpha$

$$(47)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x}{\sin x - \sin\alpha}$$

gemacht. Die Nullstellen x_ν des Nenners sind bekannt, vgl. (36). Für $\alpha = 0$, $x_\nu = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ ergibt sich ihm so aus (47) die Partialbruchreihe der Funktion $\cot x$[1]), für $x = 0$ dagegen die Partialbruchreihe (38) für $\frac{1}{\sin\alpha}$, und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhält EULER

$$(48)\quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-\cos x}{1 - \sin x} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 2\sum_0^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{1}{x - \frac{4\nu+1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{4\nu+3}{2}\pi}\right) = \sum_0^{\infty}{}_{\nu} k_\nu x^\nu$$

1) Damit beantwortet sich die von P. STÄCKEL in der S. XVII angeführten Abhandlung (*Opera omnia* I14, S. 172) aufgeworfene Frage, wo sich dieser auf logarithmischer Differentiation beruhende Beweis zuerst gedruckt finde. Brieflich hatte ihn NIKOLAUS BERNOULLI am 13. Juli 1742 an EULER mitgeteilt (*Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St. Pétersbourg 1843, t. II, p. 688); die Abhandlung 130, die den obigen von dem N. BERNOULLIS nur unbedeutend abweichenden EULERschen Beweis enthält, war damals schon geschrieben, aber noch nicht gedruckt.

womit die Formeln (40) von S. XXV wiedergewonnen sind, sobald die
kannt sind. Für diese aber ergeben sich die linearen, schon aus E 4
sionsformeln (vgl. (34)) aus der Identität

$$-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots\right)=\left(1-\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+-\cdots\right)(-1+k_1x$$

während die Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1+s^2}{2}, \tag{49}$$

der die Funktion $s=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ genügt, Rekursionsformeln liefert, we
zweiten Grade enthalten.

Durch Umformung und Verallgemeinerung der gefundenen Partia
es Euler leicht, die acht Reihen (*Opera omnia* I_{14}, S. 424)

$$\begin{array}{llll}
\sum_1^\infty \frac{1}{x^2-\nu^2}, & \sum_1^\infty \frac{(-1)^\nu}{x^2-\nu^2}, & \sum_1^\infty \frac{1}{x^2+\nu^2}, & \sum_1^\infty \\
\sum_1^\infty \frac{1}{x^2-(2\nu)^2}, & \sum_1^\infty \frac{1}{x^2+(2\nu)^2}, & \sum_1^\infty \frac{1}{x^2-(2\nu-1)^2}, & \sum_1^\infty
\end{array} \tag{50}$$

durch trigonometrische und Exponentialfunktionen zu summieren.

Nachdem er beispielsweise für die erste dieser Reihen die Summe

$$-\frac{1}{2x^2}+\frac{\pi}{2x\operatorname{tg}\pi x}$$

gefunden hat, gewinnt er die (mit (-1) multiplizierte) dritte, indem er

$$\frac{1}{2x^2}-\frac{\pi(e^{2\pi x}+1)}{2x(e^{2\pi x}-1)}.$$

Dies ist die früheste Stelle, wenn man den Tag der Mitteilung in der
den des Drucks als entscheidend ansieht, wo durch Vermittlung des
sammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrisch
vgl. S. XXXV dieses Berichts.

Übersichtlich und verhältnismäßig vollständig werden die Poten
Bernoullischen und die Eulerschen Zahlen enthalten, im Zusammenh

bruchreihen für die nämlichen Funktionen auch in der *Introductio* zusammengestellt (*Oper omnia* I8), die 1748, also zwischen der Mitteilung (1739) und der Drucklegung (1750) vo 130 erschienen ist.

Im übrigen enthält diese Abhandlung außer dem schon Berichteten noch manche Bemerkenswerte: z. B. erzeugende Funktion und Rekursionsformeln für die EULERsche Zahlen ohne Verbindung mit den BERNOULLIschen.[1]) Ferner erkennt EULER, daß die Koeffi zienten, die bei seiner Summenformel auftreten, die nämlichen sind wie die, die bei de Berechnung der Reihensummen s_{2k} sich ergeben, ohne freilich zu bemerken, daß dies Koeffizienten schon bei JAKOB BERNOULLI vorkommen; sodann gibt er für diese BERNOULLI schen Zahlen die erzeugende Funktion

$$s = \frac{z}{1-e^{-z}} \tag{51}$$

an, die sich nur im Vorzeichen von z von der jetzt gewöhnlich verwendeten Funktion unte scheidet, und aus der sich die linearen Rekursionsformeln für die BERNOULLIschen Zahle (vgl. (16), S. XXI) besonders einfach ergeben. Aus der Differentialgleichung, der s genügt,

$$z\frac{ds}{dz} - s - sz + s^2 = 0 \tag{52}$$

gewinnt er Rekursionsformeln, die von der zweiten Ordnung in den BERNOULLIsche Zahlen sind.

Nachdem EULER der große Erfolg bei der Summation der Reihen

$$s_{2k} = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2k}}$$

beschieden war, mußten ihn auch die Reihen

$$s_{2k+1} = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2k+1}}$$

reizen. Er berechnete in der Abhandlung 130 deren Werte bis $k = 5$ zunächst zahlenmäßi und bildete die Verhältniszahlen der Reihensummen zu π^{2k+1}, wobei sich keine als ration erkennbare Werte ergaben. Dann versuchte EULER den Reihen s_{2k+1}, insbesondere d Reihe s_3 oder vielmehr (was auf dasselbe hinausläuft) der Reihe

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots$$

durch Umformung beizukommen. Wenn er die Verfolgung dieses Zieles auch schließlic

1) Vgl. die Anmerkung auf S. XXIII.

angab (auch kein späterer Mathematiker hat es erreicht trotz vieler gemachter B
so ist in EULERS vergeblichen Versuchen doch so viel von einem hohen Forsc
halten, daß die diesen Versuchen gewidmeten letzten Seiten der Abhandlung
S. 440—462) auch heute noch lesbar bleiben. Es finden sich dort u. a. auc
noch unvollkommenen Ansätze für die Funktionalgleichung der RIEMANNschen Z
die dann später in den noch zu erwähnenden Abhandlungen 352 und 432[1])
weiter geführt wurden; so gibt EULER z. B. Formeln wie diese

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right),$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots = -\frac{1}{8} = \frac{-2 \cdot 3!}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right),$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \cdots = \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 5!}{\pi^6}\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \cdots\right).$$

Auch später hat EULER mit Aufwand von viel Mühe und Scharfsinn ve
sucht, die Zahlenwerte der Reihen s_{2k+1} zu klären, insbesondere in den soebe
Abhandlungen 352 und 432, die wohl diesem Versuch ihre Entstehung verdank

Den Einwänden, die gegen die Abhandlung 41 erhoben worden waren u
gegen die soeben besprochene Abhandlung 130 in Kraft bleiben, begegnete
Erfolg in der Abhandlung 61

De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum
altera, in qua eaedem summationes ex fonte maxime diverso derivantu

(*Opera omnia* I14, p. 138—155), die er zugleich mit sechs anderen Arbeiten (E
62, 83, 284) am 6. September 1742 der Berliner Akademie vorlegte.[2])

Bei der Inhaltsangabe dieser Abhandlung 61 müssen wir, um den Zusamm
Beweise herzustellen, auch auf den Inhalt der soeben genannten Abhandlungen
eingehen, sowie auf den der früher entstandenen, aber erst später, 1748, der
Akademie vorgelegten und 1750 gedruckten Abhandlung 162. Diese drei Al
59, 60, 162

1) *Opera omnia* I15, p. 70 und 131.

2) EULER, der im Juni 1727 einen Monat vor Vollendung seines 20. Lebens
Rußland gekommen war, war nach 14jährigem Aufenthalt im Juni 1741 nach B
brochen, von wo er nach 25 Jahren (im Juni 1766) wieder nach Petersburg zurück
lebte er noch bis zum 7. September 1783.

Theoremata circa reductionem formularum integralium ad quadraturam circuli.

De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur,

Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes

eröffnen den Band I17 (p. 1–34, 35—69, 70—148).

Die Abhandlung 59 knüpft an 41 und 130 an: EULER erkennt, daß man die reel Seite der Formel (39) von S. XXV auch erhält, wenn man

$$\frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n} \tag{53}$$

nach Potenzen von x entwickelt und die entstandene Reihe gliedweise zwischen den Grenz $x=0$ und $x=1$ integriert:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}\,\frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}}. \tag{54}$$

Dieser Gleichung stellt er in E 59 noch eine zweite ähnliche an die Seite:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-m-1}}{1-x^n}\,dx = \frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}, \tag{55}$$

die er mit den nämlichen Überlegungen wie (54) ableitet; er geht (vgl. S. XXIV (35), (37 von der Gleichung

$$\begin{aligned}\cos x-\cot\alpha\sin x &= 1-\frac{x\cot\alpha}{1!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3\cot\alpha}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5\cot\alpha}{5!}+\cdots\\ &=\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha+\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha-\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha+2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha-2\pi}\right)\cdots\end{aligned} \tag{56}$$

aus und gewinnt durch Vergleichung der Koeffizienten von x auf beiden Seiten die Parti bruchreihe[1])

$$\cot\alpha=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+\pi}+\frac{1}{\alpha-\pi}+\frac{1}{\alpha+2\pi}+\frac{1}{\alpha-2\pi}+\cdots, \tag{57}$$

1) Genau so verfährt auch EULER in der *Introductio*; im Grunde ist dieser Beweis v dem auf logarithmischer Differentiation der Sinusfunktion beruhenden nicht allzusehr verschiede denn der Übergang von (56) zu (57) geschieht durch

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x-\cot\alpha\sin x-1\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha-x)-\sin\alpha}{x\sin\alpha}=-\frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{d\sin\alpha}{d\alpha}.$$

die für $\alpha = \frac{m\pi}{n}$ in folgende übergeht:

$$\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+2n} + \frac{1}{m-2n} + \cdots. \tag{58}$$

Hieraus folgt (55) wie (54) aus (39).

Den hier mitgeteilten Ansatz (56) für die Gleichung (57) hatte EULER schon Abhandlung 130 gemacht, dort aber nicht weiter verfolgt, da er dort das auf mische Differentiation der Sinusfunktion hinauslaufende Verfahren bevorzugte.

Die gewonnenen Formeln (54), (55) mußten EULER zum Versuch einer zwe leitung mittels unbestimmter Integration und Einsetzen der Grenzen reizen; dazu er die Nullstellen der Funktionen $x^n \pm 1$. Hier setzt Abhandlung *162 ein, in der* nome $x^n \pm a^n$ (und allgemeinere) in ihre Faktoren und die rationalen Funktionen

$$\frac{x^{m-1} \pm x^{n-m-1}}{1 \pm x^n} \tag{59}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, worauf unbestimmt integriert wird. Die Werte stimmten Integrale mit den Grenzen 0 und 1, d. h. die Formeln (54), (55), werden E 60 angegeben.

In der uns beschäftigenden Abhandlung 61 des Bandes I_{14} benutzt EULER die der Nullstellen des Polynoms $z^n - a^n$, um die Funktion

$$\frac{\left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2x\sqrt{-1}} \tag{60}$$

(deren Grad m für ungerades n gleich $n-1$, für gerades n gleich $n-2$ ist), als reeller Faktoren zweiten Grades darzustellen:

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{m}{2}} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) - \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)\cos\frac{2\nu\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2\nu\pi}{n}}, \tag{61}$$

und erhält dann durch den Grenzübergang $n \to \infty$

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\nu^2\pi^2}\right). \tag{41}$$

Bei Gelegenheit dieser Ableitung des Sinus-Produktes[1]), die ohne Schwierigke streng gemacht werden kann, hat EULER zum ersten Male die berühmten nach

1) Im neunten Kapitel der *Introductio* (I_8, p. 153) werden auf die nämliche Art unendlichen Produkte für $e^x - 1$, $e^x - e^{-x}$, $\cos x$ u. a. hergeleitet.

nannten Formeln

$$(62)\qquad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

veröffentlicht; zuvor hatte er an Chr. Goldbach in zwei Briefen vom 9. Dezember 17 und vom 8. Mai 1742 in etwas anderer Form gleichbedeutende Formeln mitgeteilt.[1])

Nachdem Euler in E 61 auf die angegebene Weise die Herleitung des Sinusprodukt und damit die der Reihenwerte s_{2k} in Ordnung gebracht hatte, fügte er den in der Übe schrift dieser Abhandlung angezeigten zweiten Beweis für den Zusammenhang dieser Reihe werte mit π^{2k} an.[2]) Er geht dabei von den Gleichungen (54), (55) aus und setzt vora daß sie auf dem Wege über das unbestimmte Integral gewonnen wurden. Zunächst bemer er, daß aus Stetigkeitsgründen aus ihnen die für jedes s (nicht nur für $s = \frac{m}{n}$, wie z nächst gezeigt worden war) richtigen Gleichungen folgen:

$$(63)\qquad \frac{\pi}{\sin \pi s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} + \frac{1}{3-s} - \frac{1}{3+s} - \cdots$$

$$(64)\qquad \pi \cot \pi s = \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s} - \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2+s} - \frac{1}{3-s} + \frac{1}{3+s} - \cdots$$

Durch fortgesetzte Differentiation dieser Gleichungen und Einsetzen des Wert $s = \frac{1}{2}$ findet Euler die sämtlichen Werte s_{2k}, σ_{2k+1} (vgl. S. XXV (38)). So liefert z. B. d durch Differentiation aus (64) entstehende Gleichung

$$(65)\qquad \frac{-\pi^2}{\sin^2 \pi s} = -\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2} + \cdots\right)$$

für $s = \frac{1}{2}$ die Reihensumme

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Noch viele andere Reihen werden durch Einsetzen besonderer Werte für s summiert, z.

$$(66)\qquad \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \cdots;$$

diese Reihe erhält man, wenn man (63) differenziert und dann $s = \frac{1}{4}$ einsetzt.

---

1) Vgl. die Anmerkungen zu I_{14}, S. 142 und I_8, S. 147, wie auch S. XXX der vorliegend Übersicht.

2) Der zweite Beweis stimmt allerdings auf seinem letzten Stück mit dem ersten übere da beide die Partialbruchreihen für die trigonometrischen Funktionen verwenden. Aber die ge nene Ableitung dieser Partialbruchreihen rechtfertigt es, von einer zweiten Herleitung der Rei s_{2k} zu sprechen.

Démonstration de la somme de cette suite

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

(*Opera omnia* I_{14}, p. 177—186). Sie ist im Jahre 1743, also früher als 61 erschie zwar in dem von EULER sonst nie zu Veröffentlichungen benutzten *Journal littérai magne, de Suisse et du Nord*[1]), und wurde, nachdem sie lange verschollen war, von PAUL STÄCKEL wieder ans Licht gezogen; vgl. dessen in I_{14}, S. 156—176 w gedruckten Einführungsaufsatz. Sie enthält für den Summenwert $\frac{\pi^2}{6}$ der in der Ü genannten Reihe zwei neue Ableitungen (also die dritte und vierte unserer Auf doch glückte es nicht, das benutzte Summierungsverfahren auf die Reihen $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2k}}$ $k>1$ auszudehnen. EULER ist auf die Beweise dieser Arbeit später niemals meh gekommen, während er seine anderen Beweise für die Gleichungen $s_{2n}=a_{2n}\pi^{2n}$ maliger Wiederholung veröffentlichte. In der Abhandlung 63 geht EULER aus von der (

$$(67)\qquad \frac{1}{2}(\arcsin x)^2=\int_0^x\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^x\left(x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Er setzt $x=1$ und integriert rechts gliedweise, so findet er seinen dritten Bewei Gleichung

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

Der dann folgende vierte Beweis ist dem dritten ähnlich: EULER leitet mit de der unbestimmten Koeffizienten die Reihe[2])

$$(68)\qquad \frac{1}{2}(\arcsin x)^2=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{x^6}{6}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\frac{x^8}{8}+\cdots$$

als Lösung der Differentialgleichung

$$(69)\qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-1=0$$

---

1) Die Abhandlung 63 und die in den *Mémoires de l'académie des sciences de* schienene Abhandlung 352 (I_{15}, p. 70) sind die einzigen der Bände I_{14-16^*}, die in fr Sprache abgefaßt sind; alle anderen sind lateinisch geschrieben. Diese beiden sind auch mit der Abhandlung 61, die in den *Miscellanea Berolinensia* erschienen ist, die ein nicht in Petersburg gedruckt worden sind.

2) Über die Entdeckungsgeschichte dieser Reihe siehe I_{14}, S. 165.

ab. Aus (68) folgt dann

$$(70)\qquad \frac{1}{6}(\arcsin x)^3 = \int_0^x \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{x^6}{6} + \cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

und nach gliedweiser Integration für $x = 1$:

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots\right),$$

d. h.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Den Schluß der Abhandlung 63 bildet eine Zusammenstellung der Reihensumm $s_{2n} = \alpha_{2n}\pi^{2n}$ bis $n = 13$, wobei *in den Faktoren* α_{2n}[1]) die BERNOULLIschen Zahlen eige abgespalten werden, ohne daß diese Bezeichnung und ein Hinweis auf JAKOB BERNOUL vorkämen.

Es liegt nahe zu fragen, ob es außer den erwähnten EULERschen Beweisen für d Gleichung $s_2 = \frac{\pi^2}{6}$ und für die allgemeinere Summation der Reihen s_{2k} noch andere gil Da ist zunächst zu bemerken, daß man die Reihenwerte s_{2k} sehr leicht gewinnt, wenn ma die BERNOULLIschen Polynome (siehe S. XXI (13)) im Intervall (0,1) durch trigonometrisc Reihen darstellt. Auch dieser Ansatz geht in seinem einfachsten Falle auf EULER zurüc siehe die Abhandlung 555, I₁₅, insbesondere S. 440.[2]) Wegen der Einzelheiten dieser Abl tung der Reihenwerte s_{2k} darf auf die Lehrbücher, z. B. auf K. KNOPP, *Theorie und A wendung der unendlichen Reihen*, Leipzig 1922, S. 362 verwiesen werden. Im gleichen Buc S. 259 findet man noch einen weiteren Beweis (den sechsten unserer Zählung) für d Gleichung $s_2 = \frac{\pi^2}{6}$. Die Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ wird mittels der „MARKOFFschen Transformation" i in die Reihe $\sum_1^\infty \frac{3\{(n-1)!\}^2}{(2n)!}$ verwandelt; das ist aber das Sechsfache dessen, was sich ergil wenn man in der Reihe (68) für $(\arcsin x)^2$ für x den Wert $\frac{1}{2}$ einsetzt, wodurch ma $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = 6\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$ erhält.

Ähnlich wie die S. XXVII genannten Abhandlungen 55, 617, 642, 746, die sich haup sächlich mit der Summenformel beschäftigen, bedeuten die in dieser ersten Gruppe noch z

1) Wenn EULER am Schluß der Abhandlung 63 sagt, er habe bereits zwei verschiede Methoden zur Berechnung dieser Faktoren gegeben, so meint er zweifellos die beiden Rekursion formeln, von denen S. XXXI die Rede war; die STÄCKELsche Annahme I₁₄, p. 168, Anmerkun dürfte nicht zutreffen.

2) Vgl. auch S. LIV dieses Berichts.

berechnet haben.

In der am 18. August 1768 der Petersburger Akademie vorgelegten Abha

De summis serierum numeros Bernoullianos involventium

(*Opera omnia* I_{15}, p. 91—130) wird nochmals der Zusammenhang zwischen der E Summenformel und der Summation der Reihen $s_{2n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}}$ hergestellt durch der Bernoullischen Zahlen, die bis B_{34} angegeben werden (I_{15}, p. 93)[1]; hier endlich in Titel und Text auf Jakob Bernoulli hingewiesen. Sonst enthält lung meist Wiederholungen. So werden z. B. ausgehend von der Formel[2])

$$\int_0^1 z^{m-1} (\ln z)^n = (-1)^n \frac{n!}{m^{n+1}} \tag{71}$$

für die Reihensummen $s_2, s_3, \ldots$ Integraldarstellungen angegeben:

$$s_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 \frac{(\ln z)^n}{1-z}\, dz \tag{72}$$

und entsprechend für die Teilsummen

$$S_{m,n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{m^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int \frac{1-z^m}{1-z} (\ln z)^{n-1} dz. \tag{73}$$

Euler benutzt die rechte Seite dieser Formel, um $S_{m,n}$ auch für nicht ganzz definieren, was insbesondere für $m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ zu einfachen Ergebnissen wird die Eulersche Konstante nochmals berechnet.

In der am 2. Oktober 1775 der Petersburger Akademie vorgelegten, abe Eulers Tode 1785 in den *Opuscula analytica* veröffentlichten Abhandlung 597

De seriebus potestatum reciprocis methodo nova et facillima summand

(*Opera omnia* I_{15}, p. 701—722) wiederholt Euler den Inhalt früherer Abhand

1) Vorher schon *Institutiones calculi differentialis, Petropoli 1755, partis poste* *Opera omnia* I_{10}, p. 319.

2) Euler leitet sie mittels teilweiser Integration ab; noch einfacher gewinnt Euler an anderer Stelle (E 463, I_{17}) zeigt, durch Differentiation nach m auf beide Gleichung $\int_0^1 x^{m-1}\, dx = \frac{1}{m}$.

von 61. Im Gegensatz zu der in der Überschrift ausgesprochenen Meinung EULERS e Abhandlung 597 weder stofflich noch hinsichtlich des Beweisverfahrens etwas e I_{15}, S. 712 stehende Tafel der rationalen Zahlen $a_{2n} = s_{2n} : \pi^{2n}$ bis $n = 17$ steht E 393, und die am Schlusse der Abhandlung 597 mitgeteilte, auf 25—28 Stellen Tafel der Werte $\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$ war schon in der Abhandlung 128 (vgl. S. LVII) veröffentden.

ler am 3. Oktober 1776 vorgelegten Abhandlung 664

Exercitatio analytica

mnia I_{16}, p. 235—240) wird gezeigt, daß man den Weg, der von der Produktg der Kosinusfunktion zu den Reihenwerten s_{2n} führt, auch in umgekehrter Richtcklegen kann, m. a. W. daß man jenes Produkt ableiten kann, indem man von nderweitig bekannt vorausgesetzten Reihenwerten s_{2n} ausgeht.

II. INTERPOLATION. DIE GAMMAFUNKTION
DIE EULERSCHE KONSTANTE

Die den ersten der vier Bände, über die hier berichtet wird, eröffnende
De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice
(*Opera omnia* I_{14}, p. 1—24), die am 23. November 1729 der Petersburger
gelegt wurde, zeichnet sich in gleicher Weise aus durch die Bedeutung ihre
wie durch den Scharfblick, Erfindungsgeist und Kenntnisreichtum des dam
Verfassers. Es handelt sich darum, eine Funktion der reellen Veränderliche
die für positiv ganzzahliges $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$ die Werte des allgemeine
WALLISschen „*series hypergeometrica*"

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \text{etc.} \tag{1}$$

annimmt, d. h. die dem zunächst nur für positive ganzzahlige x defini
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$ auch für *andere x einen Sinn gibt.*[1]) Diese Funktion hat E

1) Die Fragestellung von E 19 hat mit der „Reihe" (1) nichts zu tun; wi
in (1) statt der + Zeichen Kommata setzen und von der „Folge"

$$1,\ 1 \cdot 2,\ 1 \cdot 2 \cdot 3,\ \ldots \tag{1'}$$

sprechen; auch in E 189 (I_{14}, p. 465) ist beispielsweise von der Reihe 1 + 2
die Rede, wo nach heutigem Sprachgebrauch die Folge 1, 2, 3, 4, ... gemeint is
Stellen freilich bedeutet bei EULER *series hypergeometrica* wirklich die Reihe
Folge (1')) oder die Reihe mit alternierenden Gliedern 1 — 1 + 2 — 6 + 24 — 1
E 247, I_{14}, p. 594), während wieder an anderen Stellen die Folge (1') (ohne
+ Zeichen) als „*series hypergeometrica*" bezeichnet wird (z. B. E 594, I_{17}, p. 217
Benennung *progressio* statt *series* E 47, I_{14}, p. 114).

EULER war sich selbstverständlich klar darüber, daß es sich bei den drei A
unendlichen Reihen, Produkte und Kettenbrüche im Grunde nur um verschiedene
unendlichen Folge handelt, wenn man auch den gelegentlichen Gebrauch des Wo
in diesem Sinne (wie oben) noch nicht als eine allgemeine Begriffsbestimmung an

späteren Arbeit (E 421, *Opera omnia* I_{17}, p. 341) mit $[x]$ bezeichnet[1]), und an die Zeichen wollen wir uns, wie es auch in der Übersicht über die Bände 17, 18, 19 der erst Serie geschehen ist (*Opera omnia* I_{19}, p. LX—LXV), im folgenden halten.

EULERS Ergebnis ist

$$(2)\qquad [x] = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{1-x}(\nu+1)^x}{\nu+x};$$

es macht keine Mühe zu zeigen, daß das Reziproke dieser Funktion $[x]$ identisch ist n der WEIERSTRASSschen ganzen Funktion

$$Fc(x+1) = e^{\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}},$$

wo

$$(3)\qquad \gamma = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu}-\log \nu\right)$$

die sog. „EULERsche Konstante" ist.[2])

In der Abhandlung 19 gibt EULER auch die (für $x \geqq 0$ gültige Integraldarstellung)

$$(4)\qquad [x] = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{t}\right)^x dt,$$

transformiert häufig eine in der Form eines jener drei Algorithmen gegebene konvergente Fol $f_1, f_2, f_3, \ldots$ in eine der beiden anderen Formen, z. B. einen Kettenbruch in eine Reihe. V z. B. S. C dieses Berichts.

1) In der Abhandlung 19 kommt für diese Funktion überhaupt kein Zeichen vor, es wi nur vom „*terminus, cuius index est x*" gesprochen. Sonst schreibt EULER auch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots$ statt $[x]$ (z. B. in der Überschrift von E 368; *Opera omnia* I_{11}) oder $\Delta:x$ (in E 352 und E 36 oder $\varphi:x$ (in E 768); für eine etwas allgemeinere Funktion schrieb er in E 613 $\Pi:x$. Ga ähnlich ist das GAUSSsche Zeichen $\Pi(x)$ für $[x]$ (*Disquisitiones generales circa seriem infinita* $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\cdots$, *Werke*, Bd. 3, p. 145), während LEGENDRE die Bezeichnung $\Gamma(x+1)$ einführ (*Exercices de calcul integral*, t. 2, 1814, p. 4) und WEIERSTRASS $Fc(x)$ für den reziproken W von $\Gamma(x)$ schreibt (*Werke*, Bd. 1, S. 161). $[x]$ ist übrigens ursprünglich bei EULER ein allg meines Funktionszeichen, das bald für diese, bald für eine andere Funktion gebraucht wir z. B. bedeutet in E 465 (I_{15}, p. 207) $[n]$ soviel wie $(1+x)^n$, wieder eine andere Bedeutung h $[n]$ in E 453 (I_{15}, p. 183). Für eine Verallgemeinerung von $[x]$ benutzt auch Euler das Zeichen s. S. LXIV.

2) Nach N. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig 1906, S. 12 kom dieses Produkt zuerst bei O. SCHLÖMILCH, *Archiv der Math. und Physik*, Bd. 4, 1844, S. 171 u bei F. NEWMAN, *Cambridge und Dublin math. Journal*, Bd. 3, 1848, S. 57 vor. Wegen der Ko stanten γ siehe die Anmerkung 1 S. XI.

die durch die Substitution $t = e^{-z}$ in die heute gebräuchlichere, ebenfalls auf EUL... gehende (siehe z. B. E 368, *Opera omnia* I18)

$$[x] = \int_0^\infty z^x e^{-z} dz \tag{5}$$

übergeht.

Er gewinnt ferner aus dem WALLISschen Produkte für π den Funktionsw...

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{6}$$

und die sich daraus mittels der Funktionalgleichung

$$[x+1] = (x+1)[x] \tag{7}$$

ergebenden. Für rationales $\frac{p}{q}$ drückt er den Funktionswert $\left[\frac{p}{q}\right]$ durch ein P... Betafunktionen aus; vgl. hierzu die dem Bande I18 vorangestellte Übersicht über ... 17, 18, 19, insbesondere S. LXI.

Am Schlusse der Abhandlung 19 gibt EULER eine Ausdehnung der Defi... n^{ten} Differentialquotienten einer Potenz für nicht notwendig ganzzahliges n:

$$\frac{d^n z^\alpha}{d z^n} = \frac{[\alpha]}{[\alpha - n]} z^{\alpha - n}. \tag{8}$$

Durch was für Überlegungen EULER zu seinem Produkte der Funktion $[x]$ g... ist aus der Abhandlung 19 nicht ersichtlich.

Erst in der 1793, also mehr als 60 Jahre später, gedruckten Abhandlung... 19. August 1776

De termino generali serierum hypergeometricarum

(*Opera omnia* I16, p. 139—162) finden wir den EULERschen Gedankengang sehr ... einandergesetzt: Vermöge der Funktionalgleichung der Funktion $[x]$ ist einerseits ... zahliges positives ν:

$$[x+\nu] = (x+1)(x+2)\dots(x+\nu)[x], \tag{9}$$

und falls auch x ganzzahlig ist,

$$[x+\nu] = (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+x)[\nu],$$

also

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{[x+\nu]}{[\nu]} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+x)} = 1 \tag{10}$$

und auch mit beliebigem festem α

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{[x+\nu]}{[\nu](\nu+\alpha)^x} = 1. \tag{11}$$

Verlangt man nun von der Funktion $[x]$, die aufzustellen versucht wird, daß sie auß der Funktionalgleichung und der Nebenbedingung $[1] = 1$ für beliebiges (nicht negati ganzzahliges) x der Gleichung (10) oder (11) genüge, so folgt aus (9) und (11) durch Division

$$[x] = \lim_{\nu \to \infty} \frac{(\nu + \alpha)^x \, 1 \cdot 2 \ldots \nu}{(x+1)(x+2)\ldots(x+\nu)} . \tag{12}$$

Nennt man den hier rechts stehenden Bruch $f(\nu)$, so kann man auch, indem man noc $\alpha = 1$ setzt, schreiben (man sieht nämlich leicht, daß die rechte Seite von α unabhängi ist; Beweis *Opera omnia* I_{16}, S. 148):

$$[x] = f(1) \frac{f(2)}{f(1)} \frac{f(3)}{f(2)} \frac{f(4)}{f(3)} \ldots$$

$$= \frac{2^x}{x+1} \cdot \frac{2^{1-x} \cdot 3^x}{x+2} \cdot \frac{3^{1-x} \cdot 4^x}{x+3} \cdot \frac{4^{1-x} \cdot 5^x}{x+4} \ldots \tag{13}$$

Hinterher erkennt man unschwer, daß dieses mit (12) übereinstimmende unendlich Produkt für alle nicht ganzzahlig negativen x konvergiert und daß es eine Funktion dar stellt, und zwar die einzige, die allen verlangten Bedingungen genügt. Was an der vor stehenden Darstellung neuzeitlicher ist als bei EULER, betrifft mehr das äußere Gewand al das Wesen.

1) EULER hat damit den grundlegenden Satz aus der Theorie der Gammafunktion vorweg genommen, den K. WEIERSTRASS 1856 im 51. Bande des *Journals für die reine und angewandt Mathematik* ohne Kenntnis von EULERS Vorgängerschaft veröffentlicht hat (siehe *Math. Werke vo Karl Weierstrass*, Bd. 1, Berlin 1894, S. 193). *An einer späteren* Stelle (*Werke*, Bd. 2, S. 91 nennt WEIERSTRASS GAUSS als den Entdecker der EULERschen Produktentwicklung (12) (sieh CARL FRIEDRICH GAUSS, *Werke*, Bd. 3, S. 143, wo EULER ebenfalls nicht genannt wird). WEIER STRASS hat dort das Produkt (12) ausdrücklich als Vorbild für seine allgemeine Produktdarstel lung ganzer transzendenter Funktionen bezeichnet.

Tatsächlich hat EULER nicht nur die Produktdarstellung (12), sondern sogar den Gedanke der Konvergenz erzeugenden Faktoren WEIERSTRASS vorweggenommen. Denn es bedeutet keine Unterschied, ob man den Gliedern des divergenten Produktes $\prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$ die Konvergenz er zeugenden Faktoren $e^{-\frac{x}{\nu}}$ oder den Gliedern der divergenten unendlichen Reihe $\sum_{1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$ die Konvergenz erzeugenden Summanden $-\frac{x}{\nu}$ oder auch $-x \log\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$ beifügt. Das tat abe EULER mit voller Absicht in der Abhandlung 613; vgl. S. XLVII dieses Berichts.

Der große Unterschied gegenüber WEIERSTRASS bleibt natürlich der, daß EULER nich eine allgemeine ganze Funktion aus ihren Nullstellen konstruieren wollte, sondern die besonder Funktion $\Gamma(x+1)$ (also das Reziproke einer ganzen Funktion) aus ihrer Funktionalgleichung.

f*

In der Abhandlung 652 bildet und untersucht EULER noch die Funktion

$$\varphi(x) = a^x \cdot \frac{a^{1-x}(a+b)^x}{a+xb} \cdot \frac{(a+b)^{1-x}(a+2b)^x}{a+(x+1)b} \cdot \frac{(a+2b)^{1-x}(a+3b)^x}{a+(x+2)b} \cdots$$

die eine Verallgemeinerung von $[x]$ ist; sie genügt der Funktionalgleichung

$$\varphi(x+1) = (a+xb)\,\varphi(x)$$

und nimmt für $x = n$ (positiv ganzzahlig) den Wert

$$a(a+b)(a+2b)\dots(a+(n-1)b)$$

an. Beispielsweise findet EULER

$$\left(\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = a \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^{2a+b-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2b}}} : \int\limits_0^1 \frac{x^{2a-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2b}}},$$

wobei freilich den Konstanten a, b noch gewisse Bedingungen aufzuerlegen wä

In der gleichzeitig mit 652 vorgelegten Abhandlung 661

Variae considerationes circa series hypergeometricas

(*Opera omnia* I16, p. 178–192) wird noch gezeigt, daß die soeben betrachtete F für große positive x asymptotisch gleich

$$A\,e^{-x}(a-b+bx)^{\frac{a}{b}+x-\frac{1}{2}}$$

ist, wo A eine von a und b, aber nicht von x abhängige Zahl ist. Es würde si lohnen, die EULERschen Bemühungen um die Ermittelung dieser Zahl A w nehmen. Zwei weitere von EULER betrachtete und von ihm $\Delta : i$ und $\Theta : i$ gen tionen lassen sich auf $\varphi(x)$ (von EULER $\Gamma : i$ genannt) zurückführen.

Nachdem EULER in der Abhandlung 19 mit großem Erfolg aus dem nur ganzzahlige n definierten Ausdruck $n!$ mittels Interpolation die Funktion $[x]$ gew wandte er sich bald anderen bestimmten Interpolationsaufgaben wie auch allgem der Interpolationslehre zu.

In der auf 19 folgenden Abhandlung 20, die erst $1^1/_2$ Jahre später als 19 1731 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde und die den Titel hat

De summatione innumerabilium progressionum

(*Opera omnia* I14, p. 25–41), wird die für $x = 1, 2, 3, \dots$ definierte Funktion

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

durch den Ausdruck $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$ auf alle positiven x ausgedehnt. Darüber wurde s

vorigen Abschnitt S. XVIII berichtet, weil in der Abhandlung 20 zum ersten Mal

Frage nach dem Werte der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ aufgeworfen wurde. Noch in einer weite

sicht ist die Abhandlung 20 merkwürdig: In ihrem 10. Paragraphen (*Opera omnia* I

wird zum ersten Male (in noch nicht voll befriedigender Weise) die EULERsche K

$$\gamma = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu}-\log\nu\right) \tag{13}$$

definiert.

In der Abhandlung 43 vom 11. März 1734

De progressionibus harmonicis observationes

(*Opera omnia* I$_{14}$, p. 87—100) werden dann 6 Dezimalstellen von γ berechnet (

richtig sind) auf Grund der Formel

$$\gamma = \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{3}s_3 + \frac{1}{4}s_4 - \frac{1}{5}s_5 + \cdots \tag{14}$$

Eine viel genauere Berechnung erfolgte dann in der Abhandlung 47, über d

im ersten Abschnitt berichtet wurde. Vom übrigen Inhalt der Abhandlung 43 si

leicht noch erwähnenswert Reihen von der Art der beiden folgenden:

$$\tag{15} \begin{aligned} \log n &= \sum_0^\infty\left(\frac{1}{1+\nu n}+\frac{1}{2+\nu n}+\cdots+\frac{1}{n-1+\nu n}-\frac{n-1}{n+\nu n}\right),\\ 0 &= 1-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{2}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots; \end{aligned}$$

deren erste folgt aus der Gleichung

$$\log n = \lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu n}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{\nu}\right),$$

die zweite ergibt sich für $x = 1$ aus der Potenzreihe

$$\log\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots$$

Die Reihe für $\log\frac{1-x^n}{1-x}$ liefert im Falle $x = 1$ einen zweiten Beweis für (15).

(*Opera omnia* I_{16}, p. 569—603) ist ausschließlich der EULERschen Konstanten γ ge... deren Berechnung auf verschiedene Weisen gezeigt wird, teils mit Hilfe der EUL... Summenformel, teils mit Benutzung des Zusammenhangs zwischen γ und den ... summen s_n. Am Schlusse der Arbeit werden 8 Formeln zusammengestellt, die alle ... schiedene Weisen γ durch die Werte s_n ausdrücken, darunter die Formel (14) von ... als Beispiele mögen noch folgende Formeln angeführt werden:

$$1-\gamma=\frac{1}{2}(s_2-1)+\frac{1}{3}(s_3-1)+\frac{1}{4}(s_4-1)+\cdots$$

$$1-\log\frac{3}{2}-\gamma=\frac{1}{3\cdot 2^2}(s_3-1)+\frac{1}{5\cdot 2^4}(s_5-1)+\frac{1}{7\cdot 2^6}(s_7-1)+\cdots$$

Aus der Formel

$$\begin{aligned}\gamma&=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1}\left(\int_0^x\frac{(1-z^n)\,dz}{1-z}-\ln\frac{1-x^n}{1-x}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1}\left(\int_0^x\frac{(1-z^n)\,dz}{1-z}+n\int_0^x\frac{z^{n-1}\,dz}{1-z^n}-\int_0^x\frac{dz}{1-z}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(\frac{n z^{n-1}}{1-z^n}-\frac{z^n}{1-z}\right)dz\end{aligned}$$

gewinnt EULER durch die Substitution $z^n=t$ und den Grenzübergang $n\to\infty$ die In... darstellung

$$\gamma=\int_0^1\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{\ln t}\right)dt.$$

Die erstmals in der Abhandlung 20 gestellte Interpolationsaufgabe: eine Funkti... zu bilden, welche für alle positiven ganzzahligen $x=n$ die vorgeschriebenen Werte

(16) $$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)$$

annimmt, wird wieder aufgegriffen in der Abhandlung 613 vom 13. März 1780[1])

---

1) Der Inhalt dieser Abhandlung findet sich zum Teil schon vorher im 17. Kapitel ... *posterioris* der *Institutiones calculi differentialis* (*Opera omnia* I_{10}, p. 619—647), das übe... eine (natürlich nicht vollständige) Zusammenfassung der EULERschen Untersuchungen über ... polation enthält, von denen im obigen zweiten Abschnitt unserer Übersicht die Rede ist.

Dilucidationes in capita postrema calculi mei differentialis de functionibus inexplicab
(*Opera omnia* I_{16}, p. 1—33).

Der Ansatz

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \varphi(\nu) - \varphi(x+\nu) \tag{17}$$

löst die gestellte Aufgabe für $x > 0$, wenn $\varphi(x)$ für $x \to \infty$ monoton gegen Null
Die von EULER angegebene Bedingung $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ ohne den Zusatz der Monotonie
nügt zwar, um die Konvergenz der Reihe (17) für ganzzahliges $x = n > 0$ nach dem G
wert (16) sicherzustellen, aber nicht für die Konvergenz der Reihe im Falle eines beliebig
doch ist andrerseits die Monotonie der Konvergenz von $\varphi(x)$ gegen Null hinreichend,
nicht notwendig.

Im Falle $\varphi(\nu) = \frac{1}{\nu}$ ergibt sich so

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{\nu(x+\nu)}; \tag{18}$$

in der Abhandlung 20 hatte EULER im nämlichen Falle die Lösung $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$ gefun
die mit (18) identisch ist, worauf übrigens EULER nicht hinweist; doch berechnet er
dort für $x = \frac{1}{2}$ den Funktionswert und findet natürlich wieder den auf anderem Weg
E 20 erhaltenen Wert $2 - 2 \log 2$.

EULER betrachtet dann Fälle, in welchen der Ansatz (17) nicht konvergiert,
$\varphi(\nu) = \sqrt{\nu}$, $\varphi(\nu) = \log \nu$ usw. In solchen Fällen hilft er sich auf eine sehr merkwür
Weise, indem er den einzelnen Reihengliedern in (17) noch Konvergenz erzeugende S
manden und zum Ausgleich der ganzen Reihe ein Anfangsglied beifügt. Sein Gedankeng
ist etwa folgender: er entwickelt $\varphi(x+\nu)$ formal nach den Regeln der Differenzenrechn
in die Reihe

$$\varphi(x+\nu) = \varphi(\nu) + x(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(\varphi(\nu+2) - 2\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu)) + \tag{19}$$

woraus sich ergibt

$$0 = [\varphi(\nu) - \varphi(x+\nu)] + x(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(\varphi(\nu+2) - 2\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu)) \tag{20}$$

Von der hier rechtsstehenden Reihe war der erste Summand das allgemeine G
der Reihe (17).

Statt dessen nimmt nun EULER bei seinem zweiten Ansatz für $f(x$ Glieder von (20) und muß dann zum Ausgleich bei $f(x)$ offenbar das An hinzufügen. Auf diese Weise kommt er zu dem Ansatz

$$(21)\qquad f(x) = x\varphi(1) + \sum_{1}^{\infty}[\varphi(\nu) - \varphi(x+\nu) + x(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu$$

Wenn

$$\lim_{\nu\to\infty}(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)) = 0$$

ist, konvergiert diese Reihe für jedes ganzzahlige $x = n > 0$ nach dem W $+ \cdots + \varphi(n)$.

Um aber die Konvergenz der Reihe (21) für jedes positive x zu noch eine Zusatzbedingung machen, als welche beispielsweise die Monoton einem gewissen x ab hinreichend, aber nicht notwendig ist.

Der dritte Ansatz EULERS

$$(22)\qquad \begin{aligned} f(x) &= x\varphi(1) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(\varphi(2) - \varphi(1)) \\ &+ \sum_{1}^{\infty}\Big[\varphi(\nu) - \varphi(x+\nu) + x(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}(\varphi(\nu+2) - 2 \end{aligned}$$

nimmt von (20) her noch ein weiteres Glied, der vierte noch eines mehr irgendein Ansatz, so auch alle späteren, und zwar nach der nämlichen R läßt sich z. B. im Falle $\varphi(\nu) = \frac{1}{\nu}$ der sich aus dem ersten Ansatz ergebe

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 9} + \cdots$$

mittels des dritten Ansatzes durch die besser konvergente Reihe

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdots}\right.$$

darstellen, damit ist also zugleich für gewisse Reihen ein Verfahren der serung gewonnen. Die von EULER gefundenen Funktionen $f(x)$ genügen gleichung

$$f(x+1) = f(x) + \varphi(x+1);$$

es genügt daher, die Funktionswerte $f(x)$ aus den hergeleiteten Reihen

$0 < x < 1$ zu berechnen, worauf für die übrigen x die Funktionalgleichung benut[zt] werden kann.

Der dritte Ansatz führt (wie EULER zu beweisen versucht[1])) zum Ziele im Fa[lle] $\varphi(\nu) = \nu^\alpha$, wenn $\alpha < 2$ ist, der zweite im Falle $\varphi(\nu) = \nu^\alpha$, wenn $\alpha < 1$ ist, außerdem [im] Falle $\varphi(\nu) = \log \nu$.

Im letzteren Falle z. B. liefert er

$$f(x) = \sum_1^\infty \log \frac{(\nu + 1)^x \nu^{1-x}}{x + \nu}. \tag{23}$$

$f(x)$ ist der Logarithmus der EULERschen Funktion $[x]$, für deren Produktdarstellung

$$[x] = \prod_1^\infty \frac{(\nu + 1)^x \nu^{1-x}}{x + \nu} \tag{24}$$

sich somit in diesem Zusammenhang eine besonders einfache und schöne Herleitung ergibt.

In der Abhandlung 613 werden noch einige allgemeinere Produkte betrachtet; au[ßerdem] findet sich in ihr ein Bild der Kurve $y = f(x)$ im Falle $\varphi(\nu) = \frac{1}{\nu}$, ebenso wie eine Zahle[n]rechnung für $\int_0^1 f(x)\,dx$.

In den besprochenen Arbeiten über die Interpolationsaufgabe, die verlangt, eine Fun[k]tion $f(x)$ zu bilden, deren Werte für $x = 1, 2, 3, \ldots$ vorgeschrieben sind, scheint sich EUL[ER] nicht ganz klar geworden zu sein, daß diese Aufgabe, wenn man keine Nebenbedingunge[n] macht, unendlich viele Lösungen hat, und er empfand es als etwas sehr Merkwürdiges, [daß] er sozusagen zufällig („*quasi casu*") zur Untersuchung einer Reihe $s(x)$ geführt wurde, d[ie] für $x = a^n$ und für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Werte $s(a^n) = n$ annahm genau wie die Funktio[n] ${}^a\log x$ (a ist bei EULER > 1 zu denken), ohne daß $s(x) = {}^a\log x$ wäre. Die Reihe $s(x)$ i[st] folgende:

$$s(x) = \frac{1 - x}{1 - a} + \frac{(1 - x)(a - x)}{a - a^3} + \frac{(1 - x)(a - x)(a^2 - x)}{a^3 - a^6}$$

$$+ \frac{(1 - x)(a - x)(a^2 - x)(a^3 - x)}{a^6 - a^{10}} + \cdots$$

---

1) Diese Konvergenzuntersuchungen EULERS sind recht bemerkenswert; man würde s[ie] heute natürlich in andere Form bringen.

2) Tatsächlich betrachtet EULER in 613 ein allgemeineres Produkt, von dem er aber (2[4]) als besonderen Fall schon in den *Institutiones calculi differentialis partis posterioris caput XV[I]* hervorgehoben hatte (*Opera omnia* I_{10}, p. 635—640).

Die Abhandlung 190 vom 26. Januar 1750

Consideratio quarumdam serierum, quae singularibus proprietatibus sunt praeditae

(*Opera omnia* I_{14}, p. 516—541) ist der Untersuchung dieser Funktion $s(x)$ gewidmet: $s(0)$ ergibt die sogen. LAMBERTsche Reihe

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^3}+\frac{1}{1-a^4}+\cdots;$$

EULER versäumt nicht, sie nach Potenzen von a zu entwickeln und auf die zahlentheoretische Bedeutung der Koeffizienten dieser Potenzreihe hinzuweisen. Ferner wird die Funktionalgleichung

$$s(x)-s(ax)+1=(1-ax)\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a^2}\right)\left(1-\frac{x}{a^3}\right)\cdots$$

abgeleitet; das rechtsstehende unendliche Produkt kommt $\left(\text{für } x=\frac{1}{a^i}\right)$ später in der Theorie der Thetafunktionen vor. Auch die weitere Funktionalgleichung

$$s(a^2x)=2s(ax)-s(x)+ax(1+s(x)-s(ax))$$

wird abgeleitet, wie auch die Entwicklung von $s(x)$ nach Potenzen von x.

Allgemeiner wird die erwähnte Interpolationsaufgabe, $f(x)$ aus den gegebenen Werten $f(1), f(2), f(3), \ldots$ zu bestimmen, wieder aufgenommen in der Abhandlung 189

De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum

(*Opera omnia* I_{14}, p. 463—515), die dreiviertel Jahre später als 190, nämlich am 21. September 1750, der Petersburger Akademie vorgelegt wurde. EULER sagt, es sei sonderbar und gegen die allgemeine Erwartung, daß es unendlich viele Funktionen $f(x)$ gebe, die in den unendlich vielen Funktionswerten $f(1), f(2), f(3), \ldots$ übereinstimmen; z. B. habe die Aufgabe: die Funktion $f(x)$ zu finden, für die $f(n)=n$ sei $(n=1, 2, 3, \ldots)$, folgende allgemeine (nicht allgemeinste) Lösung:

$$f(x)=x+\sum_{1}^{\infty} b_\nu \sin \nu\pi x; \tag{25}$$

EULER meint, obwohl er von geometrischen Vorstellungen ausgeht und erkennt, daß es sich um die Bestimmung einer durch gegebene Punkte gehenden, im übrigen willkürlichen Kurve handelt, die Funktion $f(x)-x$ müsse periodisch sein, und sagt (in § 9) ausdrücklich, daß für jede Funktion $f(x)$, für die $f(n)=1$ gilt,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\cdots$$

müsse. Er kommt zu diesem Schlusse, weil er in dem zuletzt erwähnten Beispiele die ächst nur für ganzzahliges x geltende Gleichung

$$f(x+1) = f(x)$$

jedes x in Anspruch nimmt, ebenso wie er in dem zuerst genannten Beispiele, wo die ktionswerte $f(n) = n$ gegeben waren, allgemein die Funktionalgleichung

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

tzt. Um diese zu lösen, verfährt er so: er entwickelt die linke Seite von (26) nach dem .orschen Lehrsatze

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} + \cdots$$

schließt durch Einsetzen in (26), daß die gesuchte Funktion $y = f(x)$ der linearen erentialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$y' + \frac{y''}{2!} + \frac{y'''}{3!} + \cdots = 1$$

gen müsse. Diese integriert er nach dem für eine endliche Ordnung bewiesenen[1]) Vern, indem er zu dem partikulären Integrale $y = x$ das allgemeine Integral der Differentialhung

.) $$y' + \frac{y''}{2!} + \frac{y'''}{3!} + \cdots = 0$$

ort, das die Form hat

$$y = \sum_{1}^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu x},$$

lie c_ν willkürliche Konstanten und die λ_ν die Nullstellen der Funktion

$$z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = e^z - 1,$$

die Vielfachen von $2\pi i$ sind. Indem er schließlich in (28) die Exponentialfunktionen trigonometrische ersetzt, findet er als Lösung der Differentialgleichung (27a):

$$\sum_{1}^{\infty} b_\nu \sin 2\nu\pi x + \sum_{0}^{\infty} a_\nu \cos 2\nu\pi x$$

---

1) Zuerst in E 62 (*Opera omnia* I22), dann auch in *Institutiones calculi integralis, volusecundum, sectio secunda,* cap. II (*Opera omnia* I12, p. 296—317).

und somit als Lösung der gestellten Interpolationsaufgabe

$$(30)\qquad f(x) = x + \sum_1^\infty b_\nu \sin 2\nu\pi x + \sum_0^\infty a_\nu \cos 2\nu\pi x,$$

wo wegen der Bedingung $f(n) = n$ die Koeffizienten a_ν noch der Bedingung $\sum_0^\infty a_\nu =$ genügen haben. In dem Ausdruck (29) kann man trotz der Fragwürdigkeit seiner Herlei einen ersten Ansatz für die Darstellung einer willkürlichen Funktion durch eine trig metrische Reihe erblicken. Freilich glaubt EULER den Ansatz (29) noch durch einen an ersetzen zu sollen: Er sagt, daß alle in (29) vorkommenden Funktionen $\sin 2\nu\pi x$, $\cos 2$ gerade Funktionen von

$$p = \sin \pi x \quad \text{und} \quad q = \cos \pi x$$

seien, und ersetzt daher (29) durch eine willkürliche gerade Funktion von p und q. Da von ihm zu Eingang seiner Abhandlung gegebene Beispiel (25) nicht ein Sonderfall s allgemeinen Lösung (30) ist, scheint ihm nicht aufgefallen zu sein.

Neben den beiden erwähnten Beispielen $f(n) = 1$ und $f(n) = n$ werden noch me andere (z. B. $f(n) = m^n$) in ähnlicher Weise behandelt: Die Interpolationsaufgabe zu wird durch die Aufgabe, eine Funktionalgleichung zu lösen, ersetzt, und diese wird au Integration einer Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung zurückgeführt.

Das gelegentliche Vorkommen von $e^z - 1$ als Hilfsfunktion nimmt EULER zum A um erneut ausführlich auf die Produkt- und Partialbruchentwicklungen der elemen Funktionen, auf die BERNOULLIschen Zahlen und die Reihen $\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2n}}$ wie auch auf Summenformel zu sprechen zu kommen.

Auch die Abhandlung 555 vom 18. Mai 1773

De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina

(*Opera omnia* I15, p. 435—497) beginnt mit einem Hinweis auf die Vieldeutigkeit des I polationsproblems und darauf, daß die dann folgenden Ausführungen nur eine besti Lösung aus unendlich vielen geben. Es wird dann eine ungerade Funktion $f(x)$ ange men, von der die Funktionswerte $p = f(a)$, $q = f(b)$, $r = f(c)$, $s = f(d)$ usw. bekannt s Dann wird die gerade Funktion $\frac{f(x)}{x}$ in eine Reihe

$$(31)\quad \frac{f(x)}{x} = A + B(x^2 - a^2) + C(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) + D(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) + \cdots$$

entwickelt, für deren Koeffizienten

$$A\left(= \frac{p}{a}\right),\quad B,\quad C,\quad D\ \ldots$$

das Bildungsgesetz angegeben wird. Es handelt sich also im wesentlichen um die he
Interpolationsformel NEWTONS, der aber nicht genannt wird. Die Gleichung (31) wir
auch auf die sogen. LAGRANGEsche Form gebracht

$$(32)\quad \begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{p}{a}\cdot\frac{b^2-x^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{c^2-x^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{d^2-x^2}{d^2-a^2}\cdot \text{etc.} \\ &+ \frac{q}{b}\cdot\frac{a^2-x^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{c^2-x^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{d^2-x^2}{d^2-b^2}\cdot \text{etc.} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Im ersten Beispiel wählt EULER $f(x) = \sin x$ und nimmt die vier Interpolations

$$a = \varphi, \quad b = 2\varphi, \quad c = 3\varphi, \quad d = 4\varphi.$$

Schließlich erhält er aus (32) durch den Grenzübergang $x \to 0$ die Näherungs

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sin\varphi}{1}\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \\ &- \frac{\sin 2\varphi}{2}\cdot\frac{1\cdot 1}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{1\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 4}{2\cdot 6} \\ &+ \frac{\sin 3\varphi}{3}\cdot\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 3}{1\cdot 7} \\ &- \frac{\sin 4\varphi}{4}\cdot\frac{1\cdot 1}{3\cdot 5}\cdot\frac{2\cdot 2}{2\cdot 6}\cdot\frac{3\cdot 3}{1\cdot 7}. \end{aligned}$$

Indem er statt vier unendlich viele Interpolationsstellen $\varphi,\ 2\varphi,\ 3\varphi, \ldots$ annimm
winnt er durch Grenzübergang die für $-\pi < \varphi < \pi$ gültige FOURIERsche Reihe

$$(33)\quad \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \cdots;$$

deren Herleitung aus der LAGRANGEschen Interpolationsformel ist sehr merkwürdig
auftauchenden Zweifel, ob die Gleichung (33) auch für $\varphi = \pi$ richtig sei, beschw
EULER durch die Bemerkung, man habe dann eben für φ in (33) $\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) einzu
und darauf zur Grenze $\varepsilon \to 0$ überzugehen. Gegen diese auf einer *unbegründeten* Vertaus
zweier Grenzübergänge beruhende unzulässige Definition einer Reihensumme, deren (
Funktionen einer Veränderlichen φ sind, mußte noch im 20. Jahrhundert angel

werden.[1]) EULER behauptet übrigens sogar, daß die Reihe noch für $\varphi = 2\pi$
(E 555, § 16; *Opera omnia* I₁₅, p. 450.)

Die Wahl der Interpolationsstellen

$$\frac{\varphi}{2},\ \frac{3}{2}\varphi,\ \frac{5}{2}\varphi,\ \cdots$$

führt EULER zu der Reihe

$$\sin\omega - \frac{1}{9}\sin 3\omega + \frac{1}{25}\sin 5\omega - \frac{1}{49}\sin 7\omega + \cdots, \tag{34}$$

von der er meint, *sie konvergiere* ohne Einschränkung gegen $\frac{\pi\omega}{4}$, wa
$|\omega| \leqq \frac{\pi}{2}$ richtig ist. Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ folgt aus (34) ein neuer Beweis (der für
S. XXXVII) für die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots,$$

die mit $\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2}$ gleichbedeutend ist. Ferner liefert die Integration von
Beweis der Gleichung

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}.$$

Durch immer wieder andere Wahl der Interpolationsstellen gelangt
großen Zahl sehr merkwürdiger Reihen; zur Untersuchung der auftretenden
er Betafunktionen heran. Es ist in diesem kurzen Berichte unmöglich, alle d
Ergebnisse oder gar die von EULER zu deren Gewinnung eingeschlagene
Richtigkeit zu prüfen. Als Beispiele mögen die in §§ 26 und 27 (*Opera o*
stehenden Reihen betrachtet werden. Die erste Gleichung des § 26, wo die
nur auf der rechten Seite vorkommt,

$$\pi\cot\pi x = \frac{\cos x\varphi}{x} - \frac{\cos(1-x)\varphi}{1-x} + \frac{\cos(1+x)\varphi}{1+x} - \frac{\cos(2-x)\varphi}{2-x} + \cdot$$

$$= \cos x\varphi\left(\frac{1}{x} - \frac{2x\cos\varphi}{1-x^2} - \frac{2x\cos 2\varphi}{4-x^2} - \frac{2x\cos 3\varphi}{9-x^2} - \cdots\right) \tag{35}$$

$$- \sin x\varphi\left(\frac{2\sin\varphi}{1-x^2} + \frac{2\cdot 2\sin 2\varphi}{4-x^2} + \frac{2\cdot 3\sin 3\varphi}{9-x^2} + \frac{2\cdot 4\ \mathrm{si}}{16-}\right.$$

1) Vgl. A. PRINGSHEIM, *Jahresbericht der deutschen Mathematikervereini*
S. 591 und *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* Bd. II₁,₁, Leipzig 18
Anmerkung 170.

ist für alle (nicht ganzzahligen) x und für $|\varphi| \leqq \pi$ richtig; die mit $\cos x\varphi$ multipli[...] Klammer ist nämlich gleich $\frac{\pi \cos x(\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ für $-\pi \leqq \varphi \leqq 0$ und $= \frac{\pi \cos x(-\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ [...] $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, während die mit $-\sin x\varphi$ multiplizierte Reihe gleich $\frac{\pi \sin x(\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ [...] $-\pi \leqq \varphi < 0$ und $= \frac{\pi \sin x(-\varphi + \pi)}{\sin x\pi}$ für $0 < \varphi \leqq \pi$ ist. Indem er (35) zwischen den [...]zen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ integriert, gewinnt EULER die Partialbruchreihe

$$\frac{\pi^2 \cos x\pi}{\sin^2 x\pi} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} - \cdots,$$

während die Integration zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{x}$ die Reihe

$$\frac{\pi^2}{x} \cot x\pi = \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{(x-1)^2} - \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{(x+1)^2} + \frac{\sin\frac{2\pi}{x}}{(x-2)^2} - \frac{\sin\frac{2\pi}{x}}{(x+2)^2} + \cdots$$

liefert.

Es dürfte sich wohl lohnen zu untersuchen, inwieweit andere von EULER in der [...]handlung 555 mitgeteilte Reihen und inwieweit seine Herleitungen richtig sind. E[...] selbst sagt, daß er seinen Ergebnissen nicht ganz traue (§ 33; *Opera omnia* I_{16}, S. [...] er begründet dieses Mißtrauen nicht mit dem Fehlen jeder Konvergenzuntersuchung, son[...] nur mit der erwähnten Vieldeutigkeit der Interpolationsaufgabe. Bei dieser Gelegenheit [...] er auch die Frage auf: Wie gewinnt man die allgemeinste Funktion $F(x)$, welche für

$$x = a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots \quad \text{die Werte} \quad p,\ q,\ r,\ s,\ \ldots$$

annimmt, wenn man *eine* solche Funktion $f(x)$ kennt? EULERS Antwort lautet: Man [...] eine Funktion $\Omega(x)$ mit den Nullstellen $a, b, c, d, \ldots$ Ist dann $w(z)$ eine für $z = 0$ [...]schwindende, im übrigen willkürliche Funktion, so ist

$$F(x) = f(x) + w(\Omega(x)).$$

Die richtige Antwort lautet natürlich

$$F(x) = f(x) + \Omega(x)\, w_1(x),$$

wo $w_1(x)$ irgendeine willkürliche Funktion ist. Es ist noch zu erwähnen, daß EULE[...] dieser unter manchem Gesichtspunkt bedeutenden Arbeit auch ausführlich auf den Zusam[...]hang zwischen den in seinen Entwicklungen (vgl. (32)) auftretenden Produkten und se[...] Betafunktionen eingeht.

Zum Schlusse dieses Abschnitts darf noch eine Abhandlung erwähnt werden, die w[...] ihres geometrischen Gewandes in den *Geometrieband* III der *Opera omnia* aufgenom[...]

wurde, die aber inhaltlich eine Einzelschrift über die Gammafunktion ist; 19. Dezember 1765 der Petersburger Akademie vorgelegte Abhandlung 368

De curva hypergeometrica hac aequatione $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x$ expre

Euler sagt hier, daß die in der Überschrift genannte Funktion desha stimmt sei, weil sie nicht nur die Werte $\Pi(n) = n!$ für positives ganzzahlig sondern außerdem der Funktionalgleichung $\Pi(x+1) = (x+1)\,\Pi(x)$ genügen dem schon aus früheren Abhandlungen Bekannten werden in 368 insbesondere stellen der Funktion $\Pi'(x)$ bestimmt, sowie die Funktionswerte $\Pi'(0)$, Π' ferner $\Pi'\left(\frac{1}{2}\right) : \Pi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Pi'\left(\frac{3}{2}\right) : \Pi\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Pi'\left(\frac{5}{2}\right) : \Pi\left(\frac{5}{2}\right)$ usw.

---

1) Vgl. S. XLI. Wenn es auch nur Zweckmäßigkeitsüberlegungen sind, d der Funktionalgleichung nötigen, so haben sie doch tatsächlich etwas Zwingend

III. DIE TRIGONOMETRISCHEN FUNKTIONEN

Der hauptsächliche Inhalt der Abhandlungen EULERS, über die in diesem Abschnit
berichtet werden soll, war für seine mathematischen Zeitgenossen etwas bewundernswer
Neues. Wenn er für die heutigen Mathematiker vielleicht nicht ebenso fesselnd ist, so lieg
dies daran, daß er dank EULER zum festen Bestandteil der mathematischen Bildung geworde
ist. Daß er es war, der das Rechnen mit den trigonometrischen Funktionen zu einem brauch
baren und geschmeidigen Werkzeug der Analysis und ihrer Anwendungen gemacht ha
betont er selbst mit berechtigtem Stolze in der Einleitung zu der sofort näher zu be
sprechenden Abhandlung 246, und er fügt hinzu, man dürfe dieses Verdienst nicht deswege
gering achten, weil es zum guten Teil in der Einführung einer passenden Bezeichnungs
weise bestehe. Die volle Bedeutung EULERS auf dem Gebiete der trigonometrischen Funk
tionen[1]) wird man freilich aus den paar hier zu besprechenden Arbeiten nicht ermesse
können; sie beruht auf viel breiterer Grundlage, insbesondere auch auf den Anwendunge
der Trigonometrie, die EULER in Geometrie, Mechanik und Astronomie gemacht hat.

In der Abhandlung 128 vom 15. Dezember 1749

Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales

(*Opera omnia* I_{14}, p. 364—406) geht EULER von den Partialbruchreihen

$$\frac{1}{1\pm p}\pm\frac{1}{4\pm p}\pm\frac{1}{9\pm p}\pm\frac{1}{16\pm p}+\cdots \tag{1}$$

aus und bemerkt, daß er deren Summen in der ein paar Wochen zuvor der Akademie vor
gelegten Abhandlung 130 (vgl. S. XXIX) mitgeteilt habe. Aus ihnen gewinnt er Produktdar
stellungen trigonometrischer Funktionen.[2]) Außerdem berechnet er die Koeffizienten α_ν, β

---

1) Vgl. u. A. v. BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, Teil II, Leipzi
1903, 4. Kapitel.

2) Da er in *E* 130 umgekehrt die Reihen (1) aus diesen Produkten abgeleitet hatte, kan
man das oben Mitgeteilte nicht als eine neue Ableitung der Sinus- und Kosinusprodukte an

der Potenzreihen von

$$\sin\frac{\pi}{2}x = \sum_1^\infty{}^{\nu}\, \alpha_\nu x^\nu \quad \text{und} \quad \cos\frac{\pi}{2}x = \sum_1^\infty{}^{\nu}\, \beta_\nu x^\nu$$

auf 28 Dezimalstellen (mit ganz unbedeutenden Ungenauigkeiten, die hö drei Dezimalstellen betreffen), ferner auf 20 und mehr Stellen die Koeffiz reihen für

$$\log\left(\frac{1}{x}\sin\frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{und} \quad \log\cos\frac{\pi}{2}x$$

und auf 13 Stellen die *Koeffizienten* der Potenzreihen für $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ und $\frac{1}{x}$ c dient er sich noch einer die Konvergenz verbessernden Umformung, inden bei der Funktion $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ nicht die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ der radius 1 besitzenden Potenzreihe

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x = \sum_1^\infty{}^{\nu}\, \gamma_\nu x^\nu$$

angibt, sondern die Koeffizienten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ der den Konvergenzradi Potenzreihe

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x - \frac{4x}{\pi(1-x^2)} = \sum_1^\infty{}^{\nu}\, \delta_\nu x^\nu.$$

Die ganze Abhandlung 128 kann als eine Vorarbeit für die *Intr* werden, in die ihr wesentlicher Inhalt später übergegangen ist.

Die vorhin schon genannte Abhandlung *246*

Subsidium calculi sinuum

(*Opera omnia* I_{14}, p. 542—584) ist am 9. März 1752 der Berliner und ein 12. März 1753, der Petersburger Akademie vorgelegt worden. Sie beginnt dere Abhandlungen Eulers, z. B. 447, 562) damit, daß an Stelle der I $\cos\varphi$ die Ausdrücke

$$(2) \qquad u = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad v = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

eingeführt werden (später werden dafür gewöhnlich die Buchstaben p, q Zeichen $e^{i\varphi}$, $e^{-i\varphi}$ für u, v werden nicht verwendet. Insbesondere mit Benut

sehen, sondern nur als die Beleuchtung eines früher festgestellten Zusammenh deren Seite her. Erst aus der Ableitung der Reihen (1), die später in der m entstandenen Abhandlung 60 bewiesen wurde (siehe S. XXXIII), läßt sich ohn nener Beweis für die Produktentwicklungen der trigonometrischen Funktionen

und auch die Produkte $\cos^m \varphi \sin^n \varphi$ (m, n ganzzahlig > 0) linear durch die Sinus und Kosinus der Vielfachen von φ ausdrücken, z. B.

$$2^{r+1} \cos^{2r+1} \varphi = \sum_0^r \binom{2r+1}{\nu} \cos(2r+1-2\nu)\varphi.$$

EULER nimmt fälschlich diese Formel auch für Potenzen des Kosinus mit negativen und gebrochenen Exponenten in Anspruch, wobei er die rechts stehende Summe in eine unendliche Reihe übergehen läßt. Besonders zu erwähnen ist noch das *Theorema* des § (*Opera omnia* I_{11}, S. 581), das besagt:

Kennt man die Summe der Reihe

$$\sum_0^\infty a_\nu z^\nu \quad (a_\nu \text{ reell, } z \text{ komplex})$$

(d. h. kann man sie durch die bekannten Funktionen ausdrücken), so kennt man auch die Summen der Reihen

$$\sum_0^\infty a_\nu \cos \nu\varphi, \quad \sum_1^\infty a_\nu \sin \nu\varphi.$$

Als Beispiele gibt EULER u. a. die folgenden:

$$\sum_0^\infty a^\nu \cos \nu\varphi = \frac{\cos\varphi - a}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi}, \quad \sum_1^\infty a^\nu \sin \nu\varphi = \frac{\sin\varphi}{1 + a^2 - 2a\cos\varphi}.$$

Indem er die erste dieser Gleichungen auch für $a = -1$ in Anspruch nimmt, gewinnt er aus ihr durch Integration die für $|\varphi| < \pi$ richtige Entwicklung

$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \frac{\sin 4\varphi}{4} + \cdots \quad \text{(vgl. (33), S. LIII).}$$

Das *Theorema* kehrt mit Beispielen später noch mehrmals bei EULER wieder (z. B. in den Abhandlungen 447, 655); auch in der *Analyse algébrique* von CAUCHY und in der Abhandlung ABELS über die binomische Reihe finden sich zugehörige Beispiele.

Die soeben genannte am 22. November 1733 der Petersburger Akademie vorgelegte Abhandlung 447 (*Opera omnia* I_{15}, p. 168—184)

Summatio progressionum $\sin^\lambda \varphi + \sin^\lambda 2\varphi + \cdots + \sin^\lambda n\varphi$, $\cos^\lambda \varphi + \cos^\lambda 2\varphi + \cdots + \cos^\lambda n\varphi$

beginnt wie 246 mit der Substitution (2); die in der Überschrift genannten endlichen Summen werden dann in den Fällen $\lambda = 1, 2, 3, 4$ bestimmt, was auf die Summation end-

licher geometrischer Reihen hinausläuft. EULER erkennt, daß die unendlichen Reihe

$$\sum_{0}^{\infty} (\cos \nu \varphi)^{\lambda}, \quad \sum_{1}^{\infty} (\sin \nu \varphi)^{\lambda}$$

bei ganzzahligem $\lambda > 0$ divergieren (bei geradem λ sogar eigentlich gegen $+\infty$), will auf Grund seiner Auffassung der divergenten Reihen[1]) die für die endlichen Re fundene Summierung auch für die unendlichen in Anspruch nehmen, was ihn zu baren Ergebnissen führt.

In der Abhandlung 561 vom 15. November 1773

Variae observationes circa angulos in progressione geometrica progredientes

(*Opera omnia* I16, p. 498—508) wird zunächst durch wiederholte Anwendung der Gl $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ das Produkt

$$\sin \varphi = \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{4} \cdot \cos \frac{\varphi}{8} \cdot \cos \frac{\varphi}{16} \cdots \tag{3}$$

abgeleitet, das sich schon in der früheren Abhandlung 74 findet (vgl. Abschnitt VI Berichtes). Aus (3) werden dann weitere Formeln abgeleitet, z. B. durch logari Differentiation

$$\frac{1}{\varphi} = \cot \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{8} + \cdots \tag{4}$$

Die Reihe auf der rechten Seite von (4), aus der umgekehrt wieder (3) folg man auch, wie EULER zeigt, direkt summieren, wenn man alle vorkommenden T funktionen vermöge der Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \cot \varphi - \cot 2\varphi$$

ersetzt. In gleicher Weise ergibt sich aus der Beziehung

$$\cot 3\varphi = \frac{1}{3} \cot \varphi - \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) + \frac{1}{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right) \tag{5}$$

die Summation

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} = \cot \varphi &+ \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{3}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{9}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{9}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{9}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{27}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{27}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{27}\right)\right) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

1) Vgl. S. XII.

Die Gleichung (5) führt durch Integration auf die folgende:

$$\sin 3\varphi = 4 \sin\varphi \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right).$$

sprechen weitere Produktdarstellungen:

$$\sin 4\varphi = 8 \sin\varphi \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \cos\varphi,$$

$$\sin 5\varphi = 16 \sin\varphi \cos\left(\frac{\pi}{10} + \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{10} - \varphi\right) \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \varphi\right) \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \varphi\right)$$

usw.,

nen dann wieder Reihen von der Art wie (4) abgeleitet werden können.

olche Produktdarstellungen der Funktionen $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ (für ganzzahliges $n > 0$) LER ausführlicher betrachtet in der am 12. Mai 1774 der Akademie vorgelegten Abng 562

Quomodo sinus et cosinus angulorum multiplorum per producta exprimi queant

omnia I_{15}, p. 509—521).

Er findet diese Produkte, z. B.

$$\cos 2n\varphi = 2^{2n-1} \prod_{0}^{n-1} \sin\left(\frac{2\nu+1}{2n}\pi - \varphi\right) \sin\left(\frac{2\nu+1}{2n}\pi + \varphi\right),$$

er wie in den Abhandlungen 246, 247 an Stelle von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ die Größen s $\varphi + i \sin\varphi$, $q = \cos\varphi - i \sin\varphi$ betrachtet und dann $p^n \pm q^n$ in Faktoren zerlegt.

er Inhalt dieser Abhandlung findet sich auch im 14. Kapitel der *Introductio* (*Opera* I_8, p. 258—283).

ie drei Abhandlungen 592 vom 14. August 1775, 636 vom 15. April 1776 und 655 März 1777

De resolutione fractionum transcendentium in infinitas fractiones simplices,

De multiplicatione angulorum per factores expedienda,

tiones generales circa series, quarum termini secundum sinus vel cosinus angulorum multiplorum progrediuntur

(*Opera omnia* I_{15}, p. 621—660, I_{16}, p. 79—111 und p. 163—177)

nichts grundsätzlich Neues, sondern zumeist nur Wiederholung; die erste befaßt t Partialbruchzerlegungen trigonometrischer Funktionen, wie sie auch in der Abhand-

durch Trennung des Realteils und Imaginärteils der Gleichung

$$(1+z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \binom{n}{3} z^3 + \cdots$$

ergeben ($z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $0 < r < 1$, n reell; Verallgemeinerung auf komp in der ABELschen Abhandlung über die Binomialreihe).

Am gleichen Tage wie die zuletzt erwähnte Abhandlung 655, nämlich am 6. wurde auch die Abhandlung 686

Dilucidationes super formulis, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exp ubi simul ingentes difficultates diluuntur

(*Opera omnia* I16, p. 282—310) der Petersburger Akademie vorgelegt. Wen Schwierigkeiten, von denen EULER in der Überschrift spricht, vom heutigen aus als solche kaum angesehen werden können, und wenn auch gegen die Lös gibt, sich manches einwenden läßt, so entbehrt die Arbeit doch in geschichtliche licher Hinsicht nicht des Reizes. EULER geht aus von der Formel, die $2\cos n$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ als ein Polynom von $x = 2\cos\varphi$ darstellt:

$$2\cos n\varphi = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-6}$$

$$(6) \qquad + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^{n-8} - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} x^{n-}$$

$$+ \cdots$$

Er findet es sonderbar, daß die rechte Seite abbricht, sobald die Expon anfangen würden negativ zu werden, und daß für ein negatives oder gebroc rechte Seite, die dann zur unendlichen Reihe wird, nicht gleich $\cos n\varphi$ wird; er fr ist der Wert der rechten Seite von (6), wenn die dort stehende Reihe als une gefaßt wird, bei beliebigem n, und wie erhält man eine Formel, die $\cos n\varphi$ durch ausdrückt und die für jedes n gilt? Um diese Frage zu beantworten, geht Eu Setzt man

$$z = \cos\varphi, \quad s = \cos n\varphi,$$

so ist die so definierte Funktion s von z ein partikuläres Integral der

ung

$$\frac{ds^2}{1-s^2}=\frac{n^2dz^2}{1-z^2},$$

uch der aus (7) durch *nochmaliges* Differenzieren entstehenden linearen Differentialglei- zweiter Ordnung

$$\frac{d^2s}{dz^2}(1-z^2)-z\frac{ds}{dz}+n^2s=0.$$

allgemeines Integral mit den zwei willkürlichen Konstanten α, β ist

$$\alpha\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n+\beta\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n.$$

für das partikuläre Integral

$$s=\cos n\varphi,$$

$z=\cos\varphi$ gesetzt wurde, ist

$$\alpha=\beta=\frac{1}{2}.$$

Andrerseits erhält man als allgemeines Integral der Differentialgleichung (8) durch nsatz mit unbestimmten Koeffizienten

$$A\left(z^n-\frac{n}{4}z^{n-2}+\frac{n(n-3)}{4\cdot8}z^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot8\cdot12}z^{n-6}+\cdots\right)$$

$$+B\left(z^{-n}+\frac{n}{4}z^{-n-2}+\frac{n(n+3)}{4\cdot8}z^{-n-4}+\frac{n(n+4)(n+5)}{4\cdot8\cdot12}z^{-n-6}+\cdots\right).$$

ergleichung mit (9) ergibt

$$A=2^n\alpha,\quad B=\frac{\beta}{2^n}.$$

Wenn aber nun EULER aus (9), (11) einerseits und (12), (13) andrerseits schließt

$$\cos n\varphi=2^{n-1}\left(z^n-\frac{n}{4}z^{n-2}+\frac{n(n-3)}{4\cdot8}z^{n-4}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{2^{n+1}}\left(z^{-n}+\frac{n}{4}z^{-n-2}+\frac{n(n+3)}{4\cdot8}z^{-n-4}+\cdots\right)$$

wieder $z=\cos\varphi$ gesetzt wird), so beachtet er nicht, daß (9), (10), (11) unter der netzung $|z|\leqq1$ gelten, die Reihen (12) aber für $|z|<1$ nicht konvergieren. Nur eine positive ganze Zahl ist, heben sich in dem auf der rechten Seite von (12)

stehenden Integral der Differentialgleichung (8) alle Glieder mit negativen E
man erhält also als Integral ein Polynom in x, das mit $\cos n\varphi$ identisch sei
kein anderes Polynom der Differentialgleichung genügt.

Der Inhalt der in den *Opera postuma* 1862 veröffentlichten Abhandlu

Enodatio insignis cuiusdam paradoxi circa multiplicationem angulorum

(*Opera omnia* I₁₆*, p. 284—311) ist in der Hauptsache der gleiche wie der
sprochenen Abhandlung 686. Im einzelnen sind die Überlegungen etwas and
wird noch eine Untersuchung der Potenzreihe $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ der Funktion (1 -
gefügt. Aus Bemerkungen EULERS in 810 (noch deutlicher als aus solche
übrigens hervor, daß er schließlich doch nicht so von seiner Lösung der
$\cos n\varphi$ als Funktion von $\cos\varphi$ befriedigt war, wie man nach den Übe
Arbeiten vermuten könnte; vgl. insbesondere E 810, § 22; *Opera omnia* I₁₆*,
sagt dort bei Betrachtung eines Zahlenbeispiels, daß zwar zweifellos die bei
divergenten Reihen auf der rechten Seite von (12) den richtigen Wert lief
nicht klar sei, wie man ihn daraus berechnen könne; ein bedeutsames un
liches Paradoxon bleibe übrig. Und wenn er sich notgedrungen mit seiner S
Definition der Reihensumme beruhigt, obwohl sie im vorliegenden Falle
durch Zahlenrechnung entratet, so betont er doch nochmals in § 23, d
Schwierigkeiten übrig bleiben.

Die Abhandlung 703 vom 26. Mai 1779

Methodus facilis inveniendi series per sinus cosinusve angulorum multiplor
quarum usus in universa theoria astronomiae est amplissimu

(*Opera omnia* I₁₆, p. 311—332) und die mit ihr zusammenhängende, de
Tage später vorgelegte Abhandlung 704

Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli p

(*Opera omnia* I₁₆, p. 333—355) behandeln mit glücklichstem Erfolg die v
die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ der Entwickelung einer Funktion $f(\varphi)$ in ei

$$(15) \qquad f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + \cdots$$

zu bestimmen. Von Sinusreihen ist im Gegensatz zur Überschrift der Abha
die Rede; das Fehlen dieser naheliegenden Ergänzung, wie auch daß EULE
der Abhandlung 704, die eine der bedeutendsten seines Alters ist, ganz geg

In der Abhandlung 703 leitet er folgende Formeln ab (in denen n eine ganze Zahl > 0 und $\omega = \frac{\pi}{n}$ ist):

$$(16)\quad \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f(0) + f(\omega) + f(2\omega) + \cdots + f((n-1)\omega) + \frac{1}{2}f(\pi)\right) = a_0 + a_n + a_{2n} + a_{3n} + \cdots$$

und für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$

$$(17)\quad \begin{aligned} &\frac{2}{n}\left(\frac{1}{2}f(0) + \cos\nu\omega f(\omega) + \cos 2\nu\omega f(2\omega) + \cdots + \cos(n-1)\nu\omega f((n-1)\omega) + \frac{1}{2}\cos\nu\pi f(\pi)\right) \\ &\qquad = a_\nu + a_{2n-\nu} + a_{2n+\nu} + a_{4n-\nu} + a_{4n+\nu} + a_{6n-\nu} + a_{6n+\nu} + \cdots \end{aligned}$$

Die linke Seite von (16) liefert, wenn nicht den genauen Wert von a_0, so doch in vielen Fällen einen guten Näherungswert; ebenso kann die linke Seite von (17) zur Berechnung von a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ benutzt werden. In der Abhandlung 704 erscheint dann zum ersten Male die uns heute so geläufige Darstellung

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\varphi)\,d\varphi, \quad a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\varphi)\cos\nu\varphi\,d\varphi \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

für die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe

$$f(\varphi) = a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos 2\varphi + a_3\cos 3\varphi + \cdots$$

Zum Schlusse wird dann noch die Reihe (15) in eine nach Potenzen von $\cos\varphi$ fortschreitende Reihe umgeformt.

In der Abhandlung 747 vom 13. März 1780

De seriebus memorabilibus, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimere licet

(*Opera omnia* I16*, p. 214—231) stellt sich EULER die Aufgabe, die Funktion $\cos 2x\omega$ in eine Binomialkoeffizientenreihe[1]) zu entwickeln:

$$\cos 2x\omega = 1 + Ax + B\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + C\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

---

1) Hinsichtlich solcher Reihen darf auf die *Vorlesungen über Differenzenrechnung* (Leipzig 1924) von N. E. NÖRLUND und das beigegebene ausführliche Literaturverzeichnis, wie auch auf den NÖRLUNDschen Artikel II C 7 der *Encyklopädie der math. Wiss.* Bd. II3,2 (Leipzig 1923 bis 1927), S. 675 verwiesen werden.

$$\cos 2x\omega = 1 - 2\binom{x}{1}\sin\omega\ \sin\omega - 4\binom{x}{2}\sin^2\omega\cos 2\omega$$

$$+ 8\binom{x}{3}\sin^3\omega\sin 3\omega + 16\binom{x}{4}\sin^4\omega\cos 4\omega$$

$$(18) \qquad - 32\binom{x}{5}\sin^5\omega\sin 5\omega - 64\binom{x}{6}\sin^6\omega\cos 6\omega$$

$$+ \cdots$$

Für $\sin 2x\omega$ ergibt sich die Reihe

$$\sin 2x\omega = 2\binom{x}{1}\sin\omega\cos\omega - 4\binom{x}{2}\sin^2\omega\sin 2\omega$$

$$- 8\binom{x}{3}\sin^3\omega\cos 3\omega + 16\binom{x}{4}\sin^4\omega\sin 4\omega$$

$$+ 32\binom{x}{5}\sin^5\omega\cos 5\omega - 64\binom{x}{6}\sin^6\omega\sin 6\omega$$

$$- \cdots$$

Euler unterläßt nicht, die rechte Seite von (18) nach Potenzen von
dann mit der Reihe

$$\cos 2x\omega = 1 - \frac{4x^2\omega^2}{2!} + \frac{16x^4\omega^4}{4!} + \cdots$$

zu vergleichen. Das Verschwinden des Koeffizienten von x^1 drückt sich
beiden Reihen

$$\frac{2}{1}\sin\omega\ \sin\omega - \frac{2^3}{3}\sin^3\omega\sin 3\omega + \frac{2^5}{5}\sin^5\omega\sin 5\omega - \cdots$$

und

$$\frac{2^2}{2}\sin^2\omega\cos 2\omega - \frac{2^4}{4}\sin^4\omega\cos 4\omega + \frac{2^6}{6}\sin^6\omega\cos 6\omega - \cdots$$

einander identisch gleich sind. Zur Probe beweist er auf anderem Wege

achtet die beiden allgemeineren Reihen

$$s = \frac{b \sin \omega}{1} - \frac{b^3 \sin 3\omega}{3} + \frac{b^5 \sin 5\omega}{5} - \frac{b^7 \sin 7\omega}{7} + \cdots$$

$$t = \frac{b^2 \cos 2\omega}{2} - \frac{b^4 \cos 4\omega}{4} + \frac{b^6 \cos 6\omega}{6} - \frac{b^8 \cos 8\omega}{8} + \cdots$$

gt, daß

$$s = \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 + 2b \sin \omega) - \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 - 2b \sin \omega)$$

$$t = \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 + 2b \sin \omega) + \frac{1}{4} \ln (1 + b^2 - 2b \sin \omega)$$

ner im Falle $b = 2 \sin \omega$

$$s = t$$

IV. DER BINOMISCHE SATZ. BINOMIALKOEFFIZIENTENFORMELN

Von den neun Abhandlungen, die in diesem Abschnitt besprochen werden sollt 465 vom 1. Juli 1773

Demonstratio theorematis NEUTONIANI *de evolutione potestatum binomii pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri*

(*Opera omnia* I₁₅, p. 207—216) nicht nur zeitlich die erste; sie ist auch von ganz b derer Bedeutung und Schönheit. EULER weist einleitend darauf hin, daß ihm in den *tutiones calculi differentialis* beim Beweise der für $|x| < 1$ gültigen Gleichung

$$(1) \qquad (1 + x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots,$$

wo

$$(2) \qquad \binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - \nu + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu},$$

für den Fall eines beliebigen reellen Exponenten α ein Zirkelschluß unterlaufen ist. I Abhandlung 465 geht er nicht von der in eine Potenzreihe zu entwickelnden Fun $(1+x)^\alpha$ aus, sondern unter Annahme eines vorläufig festen x von der auf der rechten von (1) stehenden Reihe, die er als Funktion φ von α betrachtet. Als bekannt darf er vo setzen, daß für ganzzahliges $\alpha = n > 0$

$$(3) \qquad \varphi(\alpha) = (1 + x)^n$$

ist; außerdem beweist er, daß die Funktion $\varphi(\alpha)$ der Funktionalgleichung

$$(4) \qquad \varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha + \beta)$$

genügt. Mit leichten Ergänzungen der EULERschen Überlegungen schließt man au und (4), daß für $|x| < 1$ und alle reellen α

$$\varphi(\alpha) = (1 + x)^\alpha$$

sein muß.

Drei Jahre nach diesem sehr schönen Beweise für den allgemeinen binomischen Lehr-
gab EULER in der am 20. Mai 1776 der Petersburger Akademie vorgelegten Abhand-
637

Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii NEWTONIANA
etiam pro exponentibus fractis valeat

omnia I₁₆, p. 112—121) einen zweiten Beweis, der als mißglückt bezeichnet werden
Schon die von EULER als selbstverständlich gemachte Annahme, daß $(1+x)^\alpha$ sich in
eihe

$$\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$$

keln läßt, bedürfte eines Beweises, ebenso die Behauptung, daß alle Koeffizienten a_ν
>0 den Faktor α haben. EULER macht dann den Ansatz

$$(1+x)^{\alpha+1} = \sum_0^\infty b_\nu x^\nu$$

acht aus den Gleichungen

$$b_\nu = a_\nu + a_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

rm der Koeffizienten a_ν abzuleiten.
n der Abhandlung 743 vom 20. Dezember 1779

De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque exprimi potest

omnia I₁₆*, p. 162—177) macht EULER für $(1+x)^\alpha$ einen ganz anderen Reihen-
nämlich

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha = A + \alpha B + \alpha(\alpha-1)C + (\alpha+1)\alpha(\alpha-1)D \\ + (\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)E \\ + (\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)F + \cdots\end{aligned}$$

Die Koeffizienten $A, B, C, D, \ldots$ sind Funktionen von x, die EULER bestimmt, indem
(5) nacheinander $\alpha = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4$ usw. setzt. (Einfacher und
tlicher ist es, ein bekanntes auf Differenzenrechnung beruhendes Interpolations-
en zu benutzen.) Das Ergebnis ist die Reihe

$$\begin{aligned}&+ \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{1+x} + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{1+x} \\ &+ \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{x^5}{(1+x)^2} \\ &+ \cdots,\end{aligned}$$

die für $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ abbricht, im übrigen für $\left|\frac{x^2}{1+x}\right| < 1$ konvergiert der aber von vornherein nicht feststeht, daß ihr Grenzwert $(1+x)^\alpha$ ist.

Dies beweist nun EULER hinterher auf geistvolle Weise. Er setzt

$$\frac{x^2}{1+x} = z,$$

erhält so für (5a) die Summe der beiden Reihen

$$s = 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} z + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{4!} z^2$$

$$+ \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{6!} z^3 + \cdots$$

und

$$u = \alpha x + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{3!} xz + \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{5!} xz^2 + \cdots$$

und zeigt schließlich (sogar auf mehrere Weisen), daß

$$s = \frac{(1+x)^\alpha + (1+x)^{1-\alpha}}{x+2}, \quad u = \frac{(1+x)^{\alpha+1} - (1+x)^{1-\alpha}}{x+2},$$

mithin

$$s + u = (1+x)^\alpha$$

ist.

Die übrigen sechs Abhandlungen, auf die in diesem Abschnitt hingewiesen ist, deln nicht sowohl von der Funktion $(1+x)^\alpha$ als von den Binomialkoeffizienten

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu+1)}{\nu!}.$$

Für diese führt EULER in der am 13. Mai 1776, also ungefähr gleichzeitig mit den wähnten zweiten Beweise der Gleichung (1) vorgelegten Abhandlung 575

De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque erecti occurrunt

(*Opera omnia* I_{15}, p. 528–568) das Zeichen $\left[\frac{\alpha}{\nu}\right]$ ein, das sich von dem heute üblichen fast nicht unterscheidet. Er leitet Formeln ab wie

$$\binom{\alpha}{\nu} + \binom{\alpha}{\nu-1} = \binom{\alpha+1}{\nu}$$

$$(6) \qquad \binom{n}{0}\binom{p}{q} + \binom{n}{1}\binom{p}{q+1} + \binom{n}{2}\binom{p}{q+2} + \cdots$$
$$= \binom{p+n}{q+n} = \binom{p+n}{p-q}.$$

Aus (6) folgt für $p = n$, $q = 0$ folgende an die Spitze der Abhandlung gestellte Gleic

$$(7) \qquad 1 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \cdots \left(= \binom{2n}{n}\right) = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n},$$

die *außerhalb des Zusammenhangs mitgeteilt etwas Verblüffendes hat. Für* (7) *gibt er* einen anderen hübschen Beweis, der sich auf Überlegungen der Wahrscheinlichkeitsrech gründet.

Euler erkennt, daß das Produkt auf der rechten Seite von (7), wie auch der a meinere Ausdruck (6) sich durch Betafunktionen ausdrücken läßt; so findet er z. B. fü die Integraldarstellung

$$(8) \qquad \frac{1}{(q+n)\int_0^1 x^{p-q}(1-x)^{q+n-1}\,dx},$$

die dann hinterher erlaubt, die auf der linken Seite von (6) stehende Funktion von p, auch für solche Fälle zu erklären, in denen p, q, n keine positiven ganzen Zahlen wobei freilich noch von Euler nicht ausdrücklich hervorgehobene Einschränkungen w der möglichen Divergenz des Integrals (8) zu machen wären. In dem besonderen Falle *auf* der linken Seite von (7) *stehenden Summe* $S(n)$ *ergeben sich für* $S\left(\frac{1}{2}\right)$, $S\left(\frac{3}{2}\right)$, S usw. Werte, die zu $\frac{1}{\pi}$ in rationalem Verhältnis stehen, z. B.

$$S\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{24}{7} \cdot \frac{32}{9}.$$

Euler *fragt auch, welche Beziehung zwischen* n, p, q *stattfinden muß, wenn das* tegral (8) in geschlossener Form auswertbar sein soll, und er findet so im Falle q $p = 1 - n$ aus (7), (8) die folgende Reihe

$$(9) \qquad 1 - \frac{n^2}{1} + \frac{n^2(n^2-1)}{1 \cdot 4} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{1 \cdot 4 \cdot 9} + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 25} - \cdots = \frac{\sin}{n}$$

die für alle Werte von n konvergiert.[1])

---

1) Über die Entdeckungsgeschichte dieser Formel und ähnlicher siehe *Encyklopädie math. Wissenschaften* II 3,1, Leipzig und Berlin 1909—1920, S. 35. Vgl. auch die Anmerkung S. I

Die Abhandlungen 584 vom 2. September 1776

De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomioru

(*Opera omnia* I_{15}, p. 604—620) und 709 vom 6. Juli 1778

De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n$$

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 28—40) beschäftigen sich mit den Koeffizienten der Reihe

$$1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots$$

für eine Polynompotenz der Form $(1 + x + x^2 + \cdots + x^r)^n$ (n beliebig reell); Beziehungen zwischen diesen Koeffizienten gefunden, darunter Verallgemeiner (6) und (7).

In der Abhandlung 663 vom 30. September 1776

Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomi

(*Opera omnia* I_{16}, p. 193—234) wird der Zusammenhang zwischen Reihen der F

$$1 + \binom{x}{0}\binom{y}{0} + \binom{x}{1}\binom{y}{1} + \binom{x}{2}\binom{y}{2} + \cdots$$

und ähnlichen Reihen einerseits und der Betafunktion andererseits vertieft u meinert; ein neuer Beweis für (6) wird in der Abhandlung 726 vom 17. Septem

Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomi

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 104—116) hergeleitet: von dem Produkte

$$\frac{z^q}{(1-z)^{q+1}} \cdot \left(1 + \frac{z}{1-z}\right)^p$$

wird zuerst der zweite Faktor nach Potenzen von $\frac{z}{1-z}$ entwickelt; dann wird Produkt in eine Reihe nach Potenzen von z umgeordnet; doch nimmt Euler reichende Begründung den zunächst nur unter Beschränkungen für p, q, n gült allgemeiner in Anspruch.

In der Abhandlung 768 endlich, die am 3. Dezember 1781 der Akademi worden ist und die den Titel hat

De unciis binomii earumque interpolatione

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 241—266), geht Euler von der für ganze positive n, q o

n (und für beliebige reelle n bei ganzen $q > 0$ leicht zu bestätigenden) Formel

$$\binom{n}{q} = \frac{[n]}{[q]\,[n-q]}$$

und verwendet sie, um das Zeichen $\binom{n}{q}$ allgemein für reelle n, q zu definieren. Er Sätze ab wie diesen:

Die Ausdrücke

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}\binom{n-a-b}{c}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{n-a}\,dx \cdot \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{n-a-b}\,dx \cdot \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{n-a-b-c}\,dx$$

n ihren Wert nicht, wenn man die Buchstaben a, b, c untereinander beliebig vertauscht. erden auch Formeln angegeben, welche die Berechnung von $\binom{p}{q}$ auf die Fälle zurück- n, in denen p und q zwischen 0 und 1 liegen. Auch wird der Verlauf der auf recht- ige Koordinaten x, y bezogenen Kurven $y = \binom{m}{x}$ für ganzzahlige Werte von m untersucht.

In der Abhandlung 72

Variae observationes circa series infinitas

(*Opera omnia* I_{14}, p. 216—244), die EULER am 25. April 1737 der Petersburg
vorgelegt hat, bestimmt er die Summen sehr merkwürdiger Reihen der Form

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n_\nu}, \tag{1}$$

wo die n_ν ganze (positive oder negative) Zahlen sind. Den Ausgangspunkt
Reihensummation, die CHR. GOLDBACH brieflich an EULER samt Beweis mitge
nämlich

$$1 = \sum_{\mu,\nu \geqq 2}^{\mu,\nu} \frac{1}{\mu^\nu - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots \tag{2}$$

Der Beweis benutzt divergente Reihen, läßt sich aber mit Erhaltung des Gru
richtig machen, wie überhaupt alle Ergebnisse dieser Abhandlung 72 richtig si
lichen Überlegungen wie bei (2) leitet EULER noch weitere Reihensummen ab,

$$\sum_{\mu,\nu \geqq 2}^{\mu,\nu} \frac{1}{(2\mu - 2)^\nu - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \cdots$$
$$= \log 2$$

$$\sum_{\mu,\nu \geqq 2}^{\mu,\nu} \frac{1}{(2\mu - 1)^\nu - 1} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \cdots$$
$$= 1 - \log 2$$

$$\sum_{\mu \geqq 2,\, \nu \geqq 3}^{\mu,\nu} \frac{1}{\mu^\nu - 1} = \frac{1}{15} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{255} + \frac{1}{624} + \cdots$$
$$= \frac{7}{4} - \frac{\pi^2}{6}.$$

---

1) Vgl. die Anmerkung I_{14}, p. 216. Weitere Literatur über diese GOLDBACH
verwandte Reihen, siehe *Encyklopädie der math. Wiss.*, Bd. II_1, S. 180, wo übrigens
BACH noch EULER erwähnt wird.

lzte dieser Beispiele war EULER auch von GOLDBACH mitgeteilt worden, doch ohne , für den EULER die von ihm entdeckte Gleichung

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$$

t.

Im zweiten Teil der Abhandlung 72 leitet EULER andere Reihen der Form (1) ab, nmehr die n_ν Primzahlen sind oder doch die Primfaktorenzerlegung der n_ν eine Rolle Er beweist zunächst die späterhin für die Theorie der RIEMANNschen Zetafunktion ichtig gewordene Identität[1])

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s} = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_\nu^s}\right)^{-1},$$

p_ν die Primzahlen bedeuten ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ...). Da er den Wert der auf ken Seite von (3) stehenden Funktion $\zeta(s)$ für $s = 2, 4, 6, \ldots$ kennt, gelangt er zu erten von vielen unendlichen Produkten, z. B. (Theorema 9):

Bringt man für $\nu = 2, 3, 4, \ldots$ die Primzahlquadrate p_ν^2 auf die Form

$$p_\nu^2 = 2q_\nu + (2q_\nu + 1) \quad (\text{also } 9 = 4 + 5,\ 25 = 12 + 13,\ 49 = 24 + 25,\ \ldots),$$

$$\prod_{2}^{\infty} \frac{2q_\nu + 1}{2q_\nu} = \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{61}{60} \cdot \frac{85}{84} \cdot \frac{145}{144} \cdots = \frac{3}{2};$$

(Theorema 12): Zerlegt man für $\nu \geq 2$ die Primzahlen p_ν in zwei Summanden $r_\nu + s_\nu$, Differenz $|s_\nu - r_\nu| = 1$ ist und von denen r_ν eine gerade, s_ν eine ungerade Zahl ist,

$$\prod_{2}^{\infty} \frac{r_\nu}{s_\nu} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdots = 2.$$

leren von EULER mitgeteilten Reihensummen ist sein Beweis unvollständig und kann t tiefer liegenden Überlegungen der Primzahlentheorie, für die diese Reihen von Beg geworden sind, richtig gemacht werden; hierzu gehören die Summationen[2])

$$\frac{(\nu)\lambda(\nu)}{\nu} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \cdots = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Theorema } 15)$$

---

[1]) Auch *Introductio* § 283 (*Opera omnia* I8, p. 299).

[2]) Vgl. E. LANDAU, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und 1909, Bd. 2, S. 571 und 673.

und

$$\sum_1^\infty \frac{\lambda(\nu)}{\nu} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \cdots = 0 \quad (\mathrm{T}$$

[Dabei ist $\lambda(1) = 1$, $\lambda(\nu) = (-1)^\varrho$ für ein aus ϱ Primfaktoren (mehrfache m
zusammengesetztes ν; $\chi(\nu)$ ist Null für gerades ν, $+1$ für $\nu = 4\mu + 1$, -1 f

Den Schluß der Abhandlung 72 bildet eine Bemerkung EULERS, die m
Schreibweise etwa so fassen würde:

$$\sum_{p_\nu < [x]} \frac{1}{p_\nu} = \log\log x + O(1)$$

(vgl. LANDAU, a. a. O. Bd. I, S. 102; $[x]$ bedeutet in dieser Formel die größte
ganze Zahl).

In der Abhandlung 247

De seriebus divergentibus

(*Opera omnia* I14, p. 585—617), die am 27. Oktober 1746 der Berliner un
1753 der Petersburger Akademie vorgelegt worden ist, setzt EULER ausfüh
drücklich seine Meinung über den Gebrauch divergenter Reihen auseinander

Über diese grundsätzlichen Fragen wurde in der Einleitung dieser Üb
lich berichtet. Es bleibt daher nur noch übrig, auf die besonderen Beispiele
denen EULER in der Abhandlung *de seriebus divergentibus* seine allgemeine T

Noch ehe diese Abhandlung 1760 im Drucke erschienen war, hatte e
tutiones calculi differentialis[1]) durch die Substitution

$$x = \frac{z}{2 - z}, \qquad z = \frac{2x}{1 + x}$$

die Reihe

$$\sum_0^\infty a_\nu x^\nu \quad \text{in eine Reihe} \quad \sum_0^\infty b_\nu \left(\frac{2x}{1+x}\right)^\nu$$

transformiert, und er hatte bemerkt, daß die Reihe $\sum_0^\infty b_\nu$ konvergieren
die Reihe $\sum_0^\infty a_\nu$ zu konvergieren braucht. In solchen Fällen betrachtet er di
$\sum_0^\infty b_\nu$ als Summe der divergenten Reihe $\sum_0^\infty a_\nu$.

1) *Partis posterioris caput I: De transformatione serierum; Opera omnia* I

$$\sum_0^\infty (-1)^\nu = \frac{1}{2}, \qquad \sum_0^\infty (-1)^\nu \nu = \frac{1}{4},$$

$$\sum_0^\infty (-1)^\nu \nu^2 = 0, \qquad \sum_0^\infty (-1)^\nu 3^\nu = \frac{1}{4}$$

summiert werden können, und versucht es dann auf die den hauptsächlichen Gegenstand der Abhandlung 247 bildende hypergeometrische Reihe[1])

(4) $$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \cdots$$

anzuwenden, die er als Wert der Funktion

(5) $$s(x) = x - x^2 + 2!\, x^3 - 3!\, x^4 + 4!\, x^5 - 5!\, x^6 + \cdots$$

an der Stelle $x = 1$ ansieht. Da er (was uns heute nicht wundern kann) zu keinem Erfolg gelangt[2]), betrachtet er die Reihe (4) als Wert für $x = 0$ einer ganz anderen Funktion, *nämlich als Summe der Interpolationsreihe*

$$\varphi(x) = 1 + (x-1) + (x-1)(x-2) + (x-1)(x-2)(x-3) + \cdots$$

für $x = 0$. Er bildet die Werte

$$\frac{1}{\varphi(1)}, \quad \frac{1}{\varphi(2)}, \quad \frac{1}{\varphi(3)}, \quad \cdots$$

und versucht nach den Regeln der Differenzenrechnung die Funktion $\frac{1}{\varphi(x)}$ in eine Interpolationsreihe

(6) $$\frac{1}{\varphi(x)} = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2) + c_3(x-1)(x-2)(x-3) + \cdots$$

---

1) Wegen dieser Bezeichnung vgl. S. XLI.

2) Allerdings gelangt EULER zu der Näherung 0,58 des richtigen Wertes 0,596...; aber bei anderer Anordnung der Rechnung, insbesondere, wenn er die benutzte Reihe an einer späteren oder früheren Stelle abgebrochen hätte, wäre die Annäherung schlechter ausgefallen, so daß die *Vermutung erlaubt ist*, die gefundene Näherung sei nicht unbeeinflußt durch die Kenntnis des auf anderem Wege (vgl. oben (8), (9)) *gefundenen* richtigen Wertes. EULER *bezeichnet selbst diese* seine erste Methode als nicht recht geeignet (non satis aptam) für eine genauere Berechnung. Der soeben gemachte Einwand gilt auch für die beiden nächsten Berechnungen, welche die oben mit $\varphi(x)$ bezeichnete Funktion benutzen und ungefähr die gleiche Genauigkeit wie die erste erreichen. EULER selbst hat sich diesen Einwand gemacht (vgl. I_{14}, S. 600, erste und folgende Zeilen) und schließlich auch die beiden von $\varphi(x)$ ihren Ausgang nehmenden Wege verworfen („haec methodus *non satis est certa*"; „*hoc modo neque satis tuto neque satis commode ad cognitionem valoris A* pervenire potest").

zu entwickeln. Die Hoffnung, den gesuchten Summenwert der Reihe als d… rechten Seite von (5) zu gewinnen, scheitert an der Divergenz der Reihe … ergeht es beim Versuch, $\log \varphi(x)$ statt $\frac{1}{\varphi(x)}$ in eine Reihe der Form (6)… Nach diesen Fehlschlägen kehrt EULER wieder zu der Reihe (5) zurück u… sie formal der Differentialgleichung

$$\frac{ds}{dx} + \frac{s}{x^2} - \frac{1}{x} = 0$$

genügt und daß andererseits

$$(7) \qquad s(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}\,dt}{t}$$

das für $x = 0$ verschwindende Integral dieser Differentialgleichung ist.[1] … und (7) $x = 1$ setzt, kommt EULER zu der Gleichung

$$(8) \qquad \begin{aligned} &1 - 1 + 2! - 3! + 4! - 5! + \cdots \\ &= e \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}\,dx}{x}. \end{aligned}$$

Das auf der rechten Seite von (8) stehende Integral berechnet er n… trapezverfahren, wobei er die Strecke $0 \ldots 1$ in 10 gleiche Teile teilt, nu… denen vier richtig sind.

Zu einer zweiten Summierung der Reihe (5) gelangt EULER noch a… sehr merkwürdigen Wege: Er erkennt, daß diese divergente Reihe sich e… den Kettenbruch

$$(9) \qquad \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \cfrac{5x}{1 + \cdots}}}}}}}}}}$$

---

1) Daß tatsächlich $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{t}}\,dt}{t}}{e^{-\frac{1}{x}}} = 0$ ist, wird von EULER nicht ausdr… folgt aber leicht aus der sog. DE L'HOSPITALschen Regel.

besseren Näherungswert

$$0{,}5963473621372,$$

der auf neun Dezimalstellen richtig ist.[1])

Zum Schlusse der Abhandlung 247 verallgemeinert EULER die zwischen der Reihe (
und dem Kettenbruch (9) gefundene Beziehung, indem er zeigt, daß der konvergen
Kettenbruch

$$\frac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\cfrac{2nx}{1+\cfrac{(m+2n)x}{1+\cfrac{3nx}{1+\cfrac{(m+3n)x}{1+\cfrac{4nx}{1+\cdots}}}}}}}}} \tag{10}$$

nach Potenzen von x entwickelt die divergente Reihe

$$\begin{aligned}1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 \\ + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \cdots\end{aligned} \tag{11}$$

liefert. Er setzt insbesondere $m=1$, $n=2$, $x=1$ und bestimmt durch den sich so ergeben
den Wert des Kettenbruchs (10) die Summe der Reihe

$$1 - 1 + 1\cdot 3 - 1\cdot 3\cdot 5 + 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9 + \cdots$$

zu 0,65568.

Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem Kettenbruch (10) und der
Reihe (11) wird wiederholt in der Abhandlung 616 vom 11. Januar 1776

De transformatione seriei divergentis

$$1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{etc.}$$

in fractionem continuam

(*Opera omnia* I_{16}, p. 34—46).

---

1) Vgl. *Institutiones calculi differentialis, partis posterioris caput I; Opera omnia* I_{10}, insbesondere auch die Anmerkung 2, p. 226.

(In einem Anhang zu dieser Arbeit wird der BROUNCKERsche Kettenbruch[1]) fü

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}}}$$

in die LEIBNIZsche Reihe

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

umgeformt, als deren erster Entdecker mit Recht GREGORY genannt wird.)

Die drei Abhandlungen 326 vom 21. Dezember 1763

Observationes analyticae

(*Opera omnia* I_{15}, p. 50—69), 551 vom 18. Mai 1772

Varia artificia in serierum indolem inquirendi

(*Opera omnia* I_{15}, p. 383—399) und 722 vom 17. August 1778

Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis $(1+x+xx)^n$

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 56—103) behandeln eine und dieselbe Aufgabe, nämlich die fo
α_n sei der Koeffizient von x^n in dem Polynome, das gleich $(1+x+x^2)^n$ ist $(n=0,1,2,$
$\beta_{n-\nu}$ sei in dem nämlichen Polynome der Koeffizient von $x^{n-\nu}$ (und damit zugleic
$x^{n+\nu}$) $(\nu \leqq n)$; es handelt sich dann darum, welche Funktionen dargestellt werden
die Reihen

$$\sum_0^\infty{}^\mu \alpha_\mu x^\mu, \quad \sum_0^\infty{}^\mu \beta_\mu x^\mu.$$

Das Ergebnis, das sich vollständig schon in der ersten der drei genannten Ab
findet, lautet

$$\sum_0^\infty{}^\mu \alpha_\mu x^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}},$$

$$\sum_\nu^\infty{}^\mu \beta_{\mu-\nu} x^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}}\left(\frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}\right)^\nu.$$

In dieser Arbeit löst EULER auch noch folgende allgemeinere Aufgabe: Welch
wenn γ_n der Koeffizient von x^n in dem nach Potenzen von x entwickelten Pol

1) Vgl. S. VII.

$$\sum_0^{\mu} \gamma_\mu x^\mu ?$$

Die Antwort lautet:

$$\sum_0^{\infty} \gamma_\mu x^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,b\,x + (b^2 - 4\,a\,c)x^2}}.$$

Die beiden anderen Arbeiten 551 und 722 bringen keine neuen Ergebnisse, unte
scheiden sich aber (besonders 722) in der Beweisführung von 326.

In den drei erwähnten Abhandlungen steckt viel bewundernswerter echt EULERsch
Scharfsinn; es ist nicht anzunehmen, daß unter den heutigen Mathematikern viele find
genug sind, um die Sätze von 326 beweisen zu können. Wenn trotzdem diese EULERsche
Untersuchungen keinen Platz in der Geschichte der Mathematik gefunden haben, so liegt
darin, daß sie abseits außer Zusammenhang mit den großen Fragen der Wissenschaft stehe
und daher mehr den Eindruck einer sehr geistreichen Spielerei machen. Den gleichen Ei
druck machte wohl ein Jahrhundert lang die im Jahre 1749 in der Berliner Akademie g
lesene, aber erst 1768 gedruckte Abhandlung 352

Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques

(*Opera omnia* I15, p. 70—90), bis dann RIEMANN in seiner berühmten 1859 in den Monat
berichten der Berliner Akademie erschienenen Arbeit

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe

(Werke, 2. Auflage, Leipzig 1892, S. 145—153) ohne Kenntnis der EULERschen Abhand
lung[1]) den gleichen Gegenstand aufgriff, der von da an immer mehr in den Vordergrun
mathematischer Forschung rückte. Das Ergebnis der Abhandlung 352 ist die Funktional
gleichung der Funktion[2])

$$\zeta(s) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\nu^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

---

1) Auf die ganz vergessene Leistung EULERS hat erst im Jahre 1894 CAHEN im Band
11₃ der Pariser *Annales de l'école normale* aufmerksam gemacht. Herr E. LANDAU hat dann in
Bande 7₃ der *Bibliotheca mathematica* 1906—1907, S. 69—79 auf die große Bedeutung de
EULERschen Abhandlung 352 hingewiesen und die EULERschen Ansätze hinsichtlich der Streng
der Beweisführung ergänzt. Heute kann man dasselbe schneller erreichen.

2) Unter $\zeta(s)$ möge ganz im Sinne EULERS nicht nur die auf der rechten Seite der obige
Gleichung stehende Reihe, soweit sie konvergiert, verstanden werden, sondern zugleich die durc
analytische Fortsetzung dieser Reihe sich ergebende meromorphe Funktion. Ebenso bedeute $\varphi(s$
die durch die Reihe auf der rechten Seite von (12) definierte ganze Funktion, gleichviel ob fü

oder eigentlich die damit gleichbedeutende Funktionalgleichung der Funktion

$$(12)\quad \varphi(s) = \zeta(s) - \frac{2}{2^s}\,\zeta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} +$$

Diese Funktionalgleichung lautet

$$(13)\qquad \frac{\varphi(1-s)}{\varphi(s)} = -\frac{[s-1](2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\pi^s}\cos\frac{s\pi}{2};$$

dabei bedeutet $[s-1]$ die EULERsche später mit $\Gamma(s)$ bezeichnete Funktion.[1])

Der EULERsche Gedankengang läßt sich in heutiger Bezeichnungsweise etwa
stellen.

Daß

$$(13a)\qquad \varphi(2k) = \frac{(-1)^{k+1}(2^{2k-1}-1)B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k}$$

ist ($k = 1, 2, 3, \ldots$), hatte EULER schon früher bewiesen (s. den I. Abschnitt die
richtes). Andrerseits erhielt er für $s = -k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) divergente Reihen,
summieren konnte[2]):

$$(14)\qquad \sum_0^\infty (-1)^{\nu+1}\nu^k = \frac{(-1)^{k+1}(2^{k+1}-1)}{k+1}B_{k+1} \qquad (k = 0, 1, 2$$

Dabei war die linke Seite von (14) zunächst erklärt als Wert für $x = 1$ de
die Potenzreihe

$$(14a)\qquad f_k(x) = \sum_0^\infty (-1)^{\nu+1}\nu^k x^\nu$$

definierten rationalen Funktion. Da sowohl $f_k(1)$ wie $\varphi(-k)$ durch die divergent
auf der linken Seite von (14) dargestellt werden, erschien für EULER die (
$f_k(1) = \varphi(-k)$ selbstverständlich; der in Wirklichkeit notwendige Beweis ergibt sic
daraus, daß einerseits die ganze Funktion $\varphi(s)$ für jeden beliebigen Wert s insb
für $s = -k$ durch CESÀROsche Summation aus der Reihe auf der rechten Seite v
berechnet werden kann und daß andererseits $f_k(1)$ aus der Reihe auf der rechten S
(14a) mit $x = 1$ nach dem gleichen Verfahren gewonnen werden kann.

---

einen gerade angenommenen Wert s diese Reihe konvergiert oder nicht; und $f_k(x)$ sei die
Funktion (mit dem Pole -1), die für $|x| < 1$ durch die Potenzreihe auf der rechten S
(14a) dargestellt wird.

1) Vgl. S. XLI.

2) Vgl. S. XXVIII, wie auch S. XIII und die Anmerkung 4 daselbst.

Die auf der rechten Seite von (14) angegebenen Zahlenwerte für $f_k(1) = \varphi(-1)$ hatte EULER in den Fällen $k = 1, 2, 3, \ldots, 6$ zunächst dadurch gefunden, daß er die Funktionen $f_k(x)$ wirklich bildete, z. B.

$$f_6(x) = \frac{1 - 57x + 302x^2 - 302x^3 + 57x^4 - x^5}{(1+x)^7}$$

und $x = 1$ einsetzte (I₁₆, p. 72, z. T. schon vorher *Inst. calc. diff. partis posterioris caput I*, *Opera omnia* I₁₀, p. 217). Um aber (14) allgemein für jedes ganzzahlige $k > 0$ zu beweisen, schlug er in E 352 *einen außerordentlich kühnen Weg* ein: Er setzte in der Formel (2a) von S. X $f(x) = x^k$, wodurch die rechte Seite zu einer endlichen Summe ohne Restglied wird; dann wählte er $a = 0$, $h = 1$, ließ links n unendlich werden und rechts alles weg, was von $b = a + mh$, d. h. also von m abhing; so bekam er (14) aus jener Formel (2a).[1]

1) In den *Institutiones calculi differentialis partis posterioris caput I* (*Opera omnia* I₁₀, p. 217) macht EULER, nachdem er erkannt hatte, daß die rekurrenten Reihen $\sum_0^\infty (-1)^{\nu+1}\nu^k x^\nu$ rationale für $x = 1$ endlich bleibende Funktionen darstellen, einen Beweisansatz, der zwar nicht zu dem allgemeinen Gesetze (14) führte, aber doch erlaubte, die Reihen (14) für jedes einzelne k zu summieren. Er zeigte: die Teilsummen $S_1 = 1^k$, $S_2 = 1^k - 2^k$ usw. der Reihe (14) lassen sich mittels eines gewissen Polynoms $P_k(x)$ vom Grade k so darstellen: $S_n = C_k \mp P_k(n)$, wo C_k eine Konstante ist und das obere Zeichen für gerades, das untere für ungerades n gilt. EULER schließt nun so: $n = \infty$ ist weder gerade noch ungerade, also ist S_∞, d. h. die Summe der unendlichen Reihe (14), gleich C_k. Der EULERsche Ansatz läßt sich leicht zu einem vollen Beweise vervollständigen: Ist $\varphi_{k+1}(x)$ das BERNOULLIsche Polynom der Ordnung $k+1$, so ist offenbar für gerade n:

$$S_n = \varphi_{k+1}(n+1) - 2^{k+1}\varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2}+1\right),$$

für ungerades n:

$$S_n = \varphi_{k+1}(n+1) - 2^{k+1}\varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Benutzt man zur Umformung dieser Gleichung das sogen. Multiplikationstheorem der BERNOULLIschen Polynome ($k > 0$)

$$\varphi_{k+1}(x) = 2^k\left(\varphi_{k+1}\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi_{k+1}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{2^{k+1}-1}{k+1}B_{k+1},$$

so erhält man die von EULER gefundene Gleichung für S_n in der folgenden genaueren Form:

$$S_n = \frac{2^{k+1}-1}{k+1}B_{k+1} \mp 2^k\left(\varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2}+1\right) - \varphi_{k+1}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\right),$$

wo wieder das obere Zeichen für gerades, das untere für ungerades n gilt. Man erkennt leicht, daß bei der Bildung der HÖLDERschen Mittel der S_n nur der erste Summand $\frac{2^{k+1}-1}{k+1}B_{k+1}$ von Bedeutung wird, woraus (14) folgt.

Die Gleichungen (13a) und (14) für die Funktionswerte $\varphi(2k)$ m
die Richtigkeit der Funktionalgleichung (13) für $s = 2, 3, 4, \ldots$ Dann
beiden Seiten von (13) noch den Grenzübergang $s \to 1$ und findet so b
$-\frac{\pi}{2\log 2}$, und ebenso findet er beiderseits durch den Grenzübergang $s \to$ (
Nachdem so die Richtigkeit der Gleichung (13) noch für $s = 1$ und s
wird sie mittels der bekannten für die Gammafunktion geltenden Gleichu

$$[\lambda]\,[-\lambda] = \frac{\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}$$

auf alle ganzzahligen $s \left(\gtrless 0\right)$ ausgedehnt.

Für $s = \frac{1}{2}$ ergibt sich die Richtigkeit von (13) sofort, da [–
Fall $s = \frac{3}{2}$ aber wird von Euler durch Zahlenrechnung nachgeprüft: di
sofort den Wert

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}} = 0{,}496773\ldots;$$

für die linke Seite aber errechnet Euler einen Zahlenwert, der mit di
5 Stellen übereinstimmt, indem er folgendermaßen vorgeht: er definiert
divergente Reihe

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \cdots,$$

berechnet die Summe der ersten 9 Glieder und den Rest mittels seiner
demselben kühnen Wege, auf dem er die Gleichung (14) abgeleitet hatt

Nach der Feststellung, daß die Funktionalgleichung (13) für all
sagt Euler, man könne an ihrer Allgemeingültigkeit nicht mehr zweife
klar darüber, daß er keinen vollen Beweis geliefert hat.

Euler betrachtet auch die Funktion

$$\psi(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{(2\nu + 1)^s}$$

und spricht die Vermutung aus, daß sie der Funktionalgleichung[2])

$$\frac{\psi(-s+1)}{\psi(s)} = \frac{[s]\,2^s}{\pi^s} \cdot \sin\frac{s\pi}{2}$$

1) Die Eulerschen Ausführungen zu einem den heutigen Anforderun
weise auszugestalten wäre eine lohnende Übungsaufgabe.

2) Diese Funktionalgleichung wurde mit der Beschränkung auf positive
von Malmsten wiedergefunden und bewiesen: *Specimen analyticum etc.*, Ups

Cette conjecture renferme une expression plus simple que la précédente; donc, puisqu'el est également certaine, il y a à espérer qu'on travaillera avec plus de succès à en chercher un démonstration parfaite, qui ne manquera pas de répandre beaucoup de lumiere sur quanti d'autres recherches de cette nature.

EULERS Hoffnung, mittels der Funktionalgleichung (13) zur Summation der Reihe

$$1 - \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{3^{2k+1}} - \frac{1}{4^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \cdots$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$, d. h. also zur Ermittelung der Funktionswerte $\varphi(2k+1)$ zu gelangen erwies sich als trügerisch, da diese Funktionswerte vermöge (13) in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen er wandte zwar am Schluß der Abhandlung 352 auf diese Ausdrücke die sogenannt DE L'HOSPITALsche Regel an und gelangte zu Gleichungen wie

$$(15)\quad \begin{aligned} 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots &= -\frac{3\pi^2}{7}(1\log 1 - 2^2\log 2 + 3^2\log 3 - 4^2\log 4 + \cdots) \\ 1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots &= \frac{5\pi^4}{4\cdot 31}(1\log 1 - 2^4\log 2 + 3^4\log 3 - 4^4\log 4 + \cdots) \end{aligned}$$

usw.,

oder (nach leichter Umformung)

$$(15a)\qquad 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^2}{2}(2^2\log 2 - 3^2\log 3 + 4^2\log 4 - \cdots)\quad \text{usw.},$$

doch ließen sich daraus keine weiteren Schlüsse ziehen.

---

integratibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis, Journ. f. d. reine u. angewandte Math. 3 (1849), S. 17. Im gleichen Jahre 1849 stellte auch SCHLÖMILCH mit der nämlichen Beschränkun diese Funktionalgleichung auf, um sie dann 1858 zu beweisen: *Lehrsatz, Archiv d. Math. Phys.* 12 (1849), S. 415; *Über eine Eigenschaft gewisser Reihen, Zeitschr. f. Math. u. Phys.* (1858), S. 130. Weder von MALMSTEN noch von SCHLÖMILCH wird EULER erwähnt. Im Jahre 187 hat dann SCHLÖMILCH wieder unter der Voraussetzung $0 < s < 1$ die EULERsche Funktionalgleichun (13) für $\varphi(s)$, die mit der für $\zeta(s)$ gleichbedeutend ist, bewiesen (offenbar ohne Kenntnis der Vor gängerschaft EULERS und RIEMANNS): *Über die Summen von Potenzen der reziproken natürliche Zahlen, Ber. der Sächs. Ges. d. Wiss., math. Kl.*, 29 (1877), S. 106; *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 2 (1878), S. 135. Die oft wiederholte und auf einer Verwechselung beruhende irrtümliche Behaup tung, SCHLÖMILCH habe schon 1849 und 1858 die EULERsche Funktionalgleichung (13) für $\varphi($ wiedergefunden und bewiesen, wurde von LANDAU in der S. XXXI Anm. 1 erwähnten Arbeit berichtig

Die Untersuchungen der Abhandlung 352 werden wieder aufgenommen und
wiederholt in der Abhandlung 432 vom 18. Mai 1772

Exercitationes analyticae

(*Opera omnia* I$_{15}$, p. 131—167); insbesondere aber werden die Bemühungen um die
(15), (15a) mit großem Nachdruck, aber ohne endgültigen Erfolg fortgesetzt. Die ei
dieser Reihen, nämlich (15a), unterwirft EULER mit dem ganzen Aufwand seiner ei
stehenden Rechenkunst („*calculis admodum ingeniosis*", wie es im *Summarium* heißt
wieder neuen Umformungen, ohne das erwünschte Ziel zu erreichen. Im einzelnen k
über diese sehr geistvollen vergeblichen Bemühungen nicht berichtet werden; als
sei nur folgende Integraldarstellung angegeben:

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^2}{4} \log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \operatorname{logsin} \varphi \, d\varphi.$$

In der Abhandlung 453 vom 23. November 1773

Insignes proprietates seriorum sub hoc termino generali contentarum

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p + q\sqrt{k})^n + \frac{1}{2}\left(a - \frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p - q\sqrt{k})^n$$

(*Opera omnia* I$_{15}$, p. 185—206) untersucht EULER den in der Überschrift mit x
neten Ausdruck, für den er auch abkürzend $fv^n + gu^n$ oder noch kürzer $[n]$ schrei
verschiedenen Richtungen hin; wir wollen im folgenden, um Verwechslungen mit
zu vermeiden, $f(n)$ schreiben. EULER beweist die Rekursionsformel

$$f(n+2) = 2pf(n+1) - rf(n),$$

wo r soviel bedeutet wie $p^2 - kq^2$, ferner Formeln wie z. B.

$$f(n+1) = pf(n) + q\sqrt{kf(n)^2 - (ka^2 - b^2)r^n}.$$

Die weiter von ihm mitgeteilten Formeln, die $v^i + u^i$ durch p und r ausdrück

$$v^6 + u^6 = 64p^6 - 96p^4r + 36p^2r^2 - 2r^3$$

sind verwandt mit den Formeln, die $\cos n\varphi$ durch die Potenzen von $\cos\varphi$ ausdrück
gehen in diese über, wenn $p = \cos\varphi$, $q = \sin\varphi$, $k = -1$ gesetzt wird. Neben der F

$$x = f(n) = f \cdot v^n + g \cdot u^n$$

betrachtet EULER noch eine zweite ähnlich gebaute

$$y = \varphi(n) = \xi \cdot v^n + \eta \cdot u^n,$$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(a + \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(a - \frac{\beta}{\sqrt{k}}\right).$$

Er zeigt, daß zwischen x und y identisch die quadratische Gleichung besteht

$$(a^2 k - \beta^2)x^2 - 2(a\alpha k - b\beta)xy + (a^2 k - b^2)y^2 + (a\beta - \alpha b)^2 r^n = 0,$$

vergleicht sie mit der allgemeinen Gleichung

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2 + Dr^n = 0,$$

für diese Lösungen x, y zu gewinnen. Die Abhandlung mündet so schließlich ins entheoretische, wie auch die beiden ihr benachbarten Abhandlungen 452 und 454 sich Zahlentheorie beschäftigen.

In der Abhandlung 477 vom 4. Juli 1771

Meditationes circa singulare serierum genus

ra omnia I16, p. 217—267) untersucht EULER die Reihen

$$s_{m,n} = 1 + \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{3^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$$

$$+ \frac{1}{4^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) + \cdots \qquad (m, n \text{ ganzzahlig } > 0)$$

vergleicht sie mit den Reihen

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots \qquad (n \text{ ganzzahlig } > 0),$$

in den Fällen $n = 2, 4, 6, \ldots$ bekannte Werte an passenden Stellen zur Probe herangen werden.

Er zeigt zuerst, daß

$$s_{n,n} = \frac{1}{2} s_n^2 + \frac{1}{2} s_{2n}$$

daß

$$s_m s_n - s_{m+n} = \sum_{\mu,\nu>0}\left(\frac{1}{\mu^m}\frac{1}{(\mu+\nu)^n} + \frac{1}{\mu^n}\frac{1}{(\mu+\nu)^m}\right)$$

sodann zerlegt er die auf der rechten Seite von (18) vorkommenden rationalen Funkon von μ (bei konstant gehaltenem ν)

$$\frac{1}{\mu^m(\mu+\nu)^n}, \quad \frac{1}{\mu^n(\mu+\nu)^m}$$

artialbrüche; dadurch gelingt es ihm, die rechte Seite von (18) als eine Summe von

Reihen der Art (16), (17) darzustellen und eine unübersehbare Fülle
zwischen solchen Reihen aufzustellen, von denen hier als Beispiele nur e
die Reihen $s_{m,n}$, bei denen $m+n=6$ ist, Platz finden mögen:

$$s_{5,1} = 3\,s_4 s_2 - \frac{1}{2}\,s_3^2 - \frac{7}{2}\,s_6,$$

$$s_{4,2} = -\frac{16}{3}\,s_4 s_2 + s_3^2 + 9\,s_6,$$

$$s_{3,3} = \frac{1}{2}\,s_3^2 + \frac{1}{2}\,s_6,$$

$$s_{2,4} = \frac{19}{3}\,s_4 s_2 - s_3^2 - 8\,s_6.$$

Bei der Abhandlung 489 vom 12. Juni 1777

De formulis exponentialibus replicatis

(*Opera omnia* I_{15}, p. 268—297) handelt es sich um folgende Iteratio
irgendeine positive, α irgendeine reelle Zahl ist, werden folgende Zahlen
bildet:

$$f_1 = r^{\alpha}, \quad f_2 = r^{f_1}, \quad f_3 = r^{f_2}, \; \ldots, \; f_{n+1} = r^{f_n}, \; \ldots$$

Die Frage ist: Was kann man über die Existenz eines Grenzwer
Zur Veranschaulichung wird die Kurve mit der Gleichung $y = r^x$ in k
naten x, y herangezogen. Da der Fall $r = 1$ bedeutungslos ist, hat man

$$\mathrm{I.}\ r > 1, \quad \mathrm{II.}\ r < 1$$

zu unterscheiden. Der I. Fall enthält die drei Unterfälle

$$\mathrm{I\,a)}\ r < e^{\frac{1}{e}}, \quad \mathrm{I\,b)}\ r = e^{\frac{1}{e}} = 1{,}44467, \quad \mathrm{I\,c)}\ r > e^{\frac{1}{e}}.$$

Im Falle I a) hat die Gleichung $r^x = x$ zwei Lösungen x_1 und x
gesprochen: die Kurve $y = r^x$ wird von der Geraden $y = x$ in zwei P
ist dann $\alpha < x_2$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = x_1$; ist aber $\alpha = x_2$, so ist $f_1 = f_2 = f_3$ =
also auch $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = x_2$; ist endlich $\alpha > x_2$, so wird $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$.

Im Falle I b) hat die Gleichung $r^x = x$ die eine Lösung $x = e$
wird von der Geraden $y = x$ berührt); ist $\alpha \leqq e$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = e$; is
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$.

Im Falle I c) hat die Gleichung $r^x = x$ keine Lösung und es ist

$$x_1 = p^{\frac{1}{p-1}}, \quad x_2 = p^{\frac{p}{p-1}}, \quad \log r = p^{-\frac{1}{p-1}} \frac{\log p}{p-1}.$$

Vährend also bei gegebenem r zur Bestimmung von x_1 und x_2 die Auflösung einer ndenten Gleichung nötig ist, kann man mittels des Parameters p, der > 1, aber sonst lich anzunehmen ist, vermöge (19) x_1, x_2, r sehr einfach ausdrücken (z. B. $p = 2$, , $x_1 = 2$, $x_2 = 4$).

n Falle II: $r < 1$ hat die Gleichung $r^x = x$ stets eine einzige Lösung ξ; es sind dann nterfälle zu unterscheiden:

$$\text{II a)} \quad r \geqq e^{-e}, \qquad \text{II b)} \quad r < e^{-e}.$$

n Falle II a) ist stets $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ vorhanden und gleich jener Zahl ξ, die der Gleichung genügt.

n Falle II b) gibt es zwei positive Zahlen x_1 und $x_2 > x_1$ mit der Eigenschaft, daß

$$r^{x_1} = x_2, \quad r^{x_2} = x_1$$

ngt man $\log r$ mittels des Parameters $p = x_2 : x_1$ auf die Form

$$\log r = p^{\frac{p}{p-1}} \frac{\log p}{1-p},$$

t

$$x_1 = p^{\frac{p}{1-p}}, \quad x_2 = p^{\frac{1}{1-p}}.$$

ie der Gleichung $r^\xi = \xi$ genügende Zahl ξ ist $> x_1$ und $< x_2$; falls $\alpha = \xi$, ist h

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \xi.$$

ber $\alpha > \xi_2$ ist, wird $\lim\limits_{n \to \infty} f_{2n+1} = x_2$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_{2n} = x_1$, während für $\alpha < \xi_1$ umgekehrt $_{+1} = x_1$, $\lim\limits_{n \to \infty} f_{2n} = x_2$ wird.

ie Abhandlung 507 vom 6. November 1777

De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum

omnia I_{15}, p. 298—313) bringt Überlegungen, die heute jedem Mathematiker ganz sind, wie

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = \infty \quad \text{für } \alpha > 0, \qquad \lim_{x \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = 0 \text{ usw.}$$

Es wird bemerkt, daß man unendlich viele immer stärker und schwächer
Ordnungen des Null- und Unendlichwerdens herstellen kann. Zum Schluß wird
Einfluß des Differenzierens auf die Größenordnung eines Ausdrucks hingewiesen, z. B.
daß für kleine positive x der Differentialquotient von $x^{\alpha}\left(\log \frac{1}{x}\right)^{m}$ ($\alpha > 0$, m belie
einem relativ kleinen Fehler

$$\alpha x^{\alpha-1}\left(\log \frac{1}{x}\right)^{m}$$

ist, daß daher auch für kleine x näherungsweise

$$\int_{0}^{x} x^{\alpha}\left(\log \frac{1}{x}\right)^{m} dx = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}\left(\log \frac{1}{x}\right)^{m}$$

ist.

Die kurze Abhandlung 565 vom 16. Oktober 1775

De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet

(*Opera omnia* I16, p. 522—527) enthält nicht sowohl Einzelausführungen als vieln
Bemerkung grundsätzlicher Art: es wird darauf hingewiesen, daß aus den rationale
tionen durch Integration neue Transzendenten gewonnen wurden und daß auch (el
Integrale wie

$$\int \sqrt{\frac{f+gx^{2}}{h+kx^{2}}}\, dx$$

schon zu den bekannten Funktionen gerechnet werden dürften, daß man aber au
unendliche Reihen unzählige neue Zahlen und Funktionen definieren könne. Er erw
Beispiele für $q = \frac{1}{2}$ die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} q^{\nu^{2}},$$

die später in der Theorie der Thetafunktionen verwendet wurde, ferner die durch d

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu}-1}$$

definierte Zahl, von der er behauptet, sie sei weder rational noch in einfacher Wei
die bekannten Irrationalzahlen ausdrückbar. Ferner schreibt er als neue mit den b
Funktionen in keinem Zusammenhang stehende Transzendente die Reihe

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a^{2}+x^{2}} + \frac{1}{a^{3}+x^{3}} + \cdots$$

an. Endlich bemerkt er, um die FERMATsche Behauptung, daß jede natürliche Za Summe dreier Dreieckszahlen $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ sei, zu beweisen, habe man nur zu zeigen, daß Reihe $\sum_3^\infty a_\nu x^\nu$ für die dritte Potenz der Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\nu(\nu+1)}{2} x^\nu$$

alle Koeffizienten $a_3, a_4, a_5, \ldots$ von Null verschieden sind.[1])

Als Ausführungen zu der Aufgabe, die EULER in dieser Arbeit der Analysis g hatte, nämlich Zahlen und Funktionen durch Reihen zu definieren, können die in Abschnitt noch zu besprechenden Abhandlungen wie auch die bisher schon erwähnten

So beschäftigt sich EULER in der Abhandlung 684 vom 16. Januar 1777

De radicibus aequationis infinitae

(*Opera omnia* I_{16}, p. 241—265) mit der Funktion

$$F(x) = 1 - \frac{x^2}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n(n+1)\cdots(n+5)} + \cdots,$$

insbesondere mit ihren Nullstellen.

Gibt man dem Parameter n der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, so erhält m bekannten Funktionen

$$\cos x \quad \text{mit den Nullstellen } \pm\frac{2\nu-1}{2}\pi,$$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{mit den Nullstellen } \pm\nu\pi,$$

$$\frac{2(1-\cos x)}{x^2} \quad \text{mit den Nullstellen } \pm 2\nu\pi \qquad (\nu = 1, 2,$$

Da die zuletzt genannten Nullstellen sämtlich zweifache sind, vermutet EULER den S

Die Nullstellen der Funktion $F(x)$ sind, falls der Parameter $n > 0$, aber $\leqq$ sämtlich reell, für $n > 3$ aber sämtlich imaginär.

Da er diesen Satz nicht allgemein beweisen kann (er wurde erst 1926 von G. bewiesen[2])), versucht er (wie oft in ähnlichen Fällen), ihn für gewisse Werte durch Z rechnung zu überprüfen. Er bestimmt so für $n = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 4$ jedesmal näherung die dem Betrage nach kleinste Nullstelle von $F(x)$, die sich im Falle $n = 4$ als ima in den übrigen Fällen als reell erweist, wie erwartet.

1) Vgl. die Anmerkung I_{15}, p. 526.

2) *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana.* Anno V, Nr. 2. Aprile 1926.

Zu Beginn der am 3. Februar 1777 der Petersburger Akademie vo
lung 685

Exercitatio analytica, ubi imprimis seriei maxime generalis summa

(*Opera omnia* I_{16}, p. 266—281) erinnert EULER daran, daß er in einer f
legentlich der Bestimmung der Bogenlänge einer Hyperbel (vgl. E 651
p. 435) auf die Reihe

$$\frac{1}{7}+\frac{1\cdot 5}{7\cdot 11}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{7\cdot 11\cdot 15}+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{7\cdot 11\cdot 15\cdot 19}+\cdots=\frac{1}{2} \tag{18}$$

gestoßen war. Er hat das Bedürfnis, diese Reihe noch von einer anderen
suchen, und betrachtet daher die Funktion

$$s(x)=\frac{1}{7}x^7+\frac{1\cdot 5}{7\cdot 11}x^{11}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{7\cdot 11\cdot 15}x^{15}+\cdots,$$

die für $x=1$ die linke Seite von (18) liefert. Um diese Funktion auf
führen, geht er so vor, wie er es in ähnlichen Fällen häufig tat: er ze
$s(x)$ einer Differentialgleichung genügt, und durch deren Integration fin

$$s(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^4}\int_0^x\frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}};$$

für $x=1$ ergibt sich dann der Wert $\frac{1}{2}$ in Übereinstimmung mit (18)
sich nicht mit dieser Kraftprobe, sondern betrachtet noch die allgemeine

$$S(x)=\frac{a}{b}x^b+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+\vartheta}{b+\vartheta}x^{b+\vartheta}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+\vartheta}{b+2\vartheta}\cdot\frac{a+2\vartheta}{b+2\vartheta}x^{b+2\vartheta} \tag{19}$$

die für $a=1$, $b=7$, $\vartheta=4$, $x=1$ in (18) übergeht. Er findet wieder
rentialgleichung einen geschlossenen Ausdruck für $S(x)$:

$$S(x)=\frac{a}{n\vartheta}x^{b-\vartheta}-\frac{a(b-\vartheta)}{n\vartheta}(1-x^\vartheta)^n\int_0^x\frac{\xi^{b-\vartheta-1}\,d\xi}{(1-\xi^\vartheta)^n}, \tag{20}$$

wo n zur Abkürzung für $\frac{b-a-\vartheta}{\vartheta}$ gesetzt ist. Aus (19) und (20) folgt

$$\begin{aligned}&\frac{a}{b}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+\vartheta}{b+\vartheta}+\frac{a}{b}\cdot\frac{a+\vartheta}{b+\vartheta}\cdot\frac{a+2\vartheta}{b+2\vartheta}+\cdots\\&=\frac{a}{b-a-\vartheta}.\end{aligned} \tag{21}$$

EULERS Bemerkung, daß diese Reihe gelte, falls $b>a+\vartheta$, ist für posi

$$\frac{a}{\vartheta} = \frac{a}{a_1+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdot\frac{a_2}{a_3+\vartheta} + \cdots$$

… einer ganz einfachen Identität ableiten läßt; es ist nämlich[1])

$$\frac{a}{\vartheta} = \frac{a}{a_1+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{\vartheta}$$

$$= \frac{a}{a_1+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdot\frac{a_2}{\vartheta}$$

$$= \frac{a}{a_1+\vartheta} + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta} + \cdots + \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+\vartheta}$$

$$+ \frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+\vartheta}\cdot\frac{a_n}{\vartheta},$$

…raus folgt (22), wenn das Restglied

$$\frac{a}{a_1+\vartheta}\cdot\frac{a_1}{a_2+\vartheta}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+\vartheta}\,\frac{a_n}{\vartheta}$$

gegen Null konvergiert.

…e Abhandlung 710 vom 3. September 1778

Specimen transformationis singularis serierum

(…*omnia* I_{16^*}, p. 41—55) ist wieder eine von denen, durch die Euler als erster den … eines Weges bahnte, der später eine breite Straße mathematischer Forschung wurde: …achtet die Funktion $s(x)$, welche durch die hypergeometrische Reihe[2])

$$\ldots c, x) = 1 + \frac{a\cdot b}{1!\,c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!\,c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!\,c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$$

… ist. Er zeigt, daß $s(x)$ der Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2s}{dx^2} + [c-(a+b+1)x]\frac{ds}{dx} - a\,b\,s = 0$$

…und daß daher auch

$$s = (1-x)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b,\ c,\ x)$$

…) Ein ähnliches Beweisverfahren (angewendet auf die Reihe (21)) findet sich auch in der …ung 670 (*Opera omnia* I_{16}, p. 125).

…) Der Name und die Bezeichnung finden sich zuerst bei C. F. Gauss in der Abhandlung …*iones generales circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\cdots$ (*Werke*, … 134). Über die andersartige Bedeutung des Wortes „*series hypergeometrica*" siehe S. XL.

ist. EULER scheint die ganze Größe des Schatzes, den er aufgeschürft hatte, messen zu haben; er hat manches davon, was er selbst hätte heben können, folgern, allen voran GAUSS, überlassen.[1]) In der Abhandlung 710 begnügt einem Beispiel: Das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{(1+a^2-2a\cos\varphi)^{n+1}},$$

wo $i>0$ und $n \gtrless 0$ ganze Zahlen bedeuten, ist gleich

$$\frac{(1-a^2)^{2n+1}}{\pi a^i}\binom{n+i}{i}F(-n+i,\,-n,\,i+1,\,a^2).$$

Ersetzt man n durch $-n-1$ und benutzt (23), so gelangt man zu folgen zwischen zwei bestimmten Integralen:

$$(24)\qquad \int_0^\pi (1-2a\cos\varphi+a^2)^n\cos i\varphi\, d\varphi : \int_0^\pi \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{n+1}}$$
$$=\binom{n}{i}(1-a^2)^n : \binom{-n-1}{i}(1-a^2)^{-n-1}.$$

Diese Gleichung hatte EULER schon früher auf andere Weise bewiesen (vgl lungen 672, 673 und insbesondere 674, *Opera omnia* I₁₉, p. 141, 168, 197; Übersicht über diese Abhandlungen I₁₉, p. XLV). Auch durch dieses Beispiel chung (24) hat EULER eine wichtige Entdeckung vorweggenommen: Setzt m (24) $i=0$ und $\frac{a^2+1}{a^2-1}=x$, so erhält man die später wieder von JACOBI[2]) bew heit der beiden Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}},$$

durch deren erstes LAPLACE[3]) das LEGENDREsche Polynom $P_n(x)$ dargestellt

---

1) Vgl. jedoch den Beitrag EULERS zur hypergeometrischen Funktion in E 12 Bericht S. CI) und insbesondere die eingehende Untersuchung einer allgemeiner gleichung, in der die der hypergeometrischen Reihe als besonderer Fall enthalten Bande der *Inst. calc. int., cap.* VIII—XI, *Opera omnia* I₁₂, p. 177—245. Der Her Bandes L. SCHLESINGER schließt (I₁₂, p. VIII) seine Würdigung dieser großen Leistu den Worten: „Wir finden also schon bei EULER das Prinzip, das später GAUSS und fruchtbringender Weise ausgestaltet haben."

2) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 26, 1843, S. 81; S. 148.

3) *Mécanique céleste*, t. 5, Livre XI, Chap. II.

...er Abhandlung 736 vom 31. Mai 1779

De summatione serierum in hac forma contentarum

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^6}{36}+\cdots$$

...*nia* 16*, p. 117—138) werden außer der in der Überschrift genannten Funktion

$$f(x)=\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu^2}$$

...Funktionen

$$g(y)=\sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu+1}y^\nu}{\nu^2}$$

$$h(z)=\sum_1^\infty \frac{z^{2\nu-1}}{(2\nu-1)^2}$$

... Nachdem EULER schon in der Abhandlung 20 (siehe S. XIX dieses Berichts) ...atte, daß

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}(\log 2)^2$$

...gemeinert er jetzt das damals zur Ableitung von (25) eingeschlagene Verfahren ...gt so für gewisse Werte der Veränderlichen x, y, z zu merkwürdigen Beziehungen ...den Funktionen $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$, z. B.

$$f(a)+g(b)=\frac{\pi^2}{6}-\log a\cdot\log b\sqrt{a},$$

... $a=1$ ist; für $a=\frac{1}{2}$, $b=1$ folgt hieraus wieder (25), dagegen für $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}\cdot\log 6.$$

...d beispielsweise bewiesen, daß

$$f\left(\frac{1}{3}\right)+2h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}(\log 3)^2$$

...19

Continuatio fragmentorum ex adversariis mathematicis depromptorum

...*nia* 16*, p. 312—327) sind aus dem EULERschen Nachlasse einige Bemerkungen ...e Zusammenhang untereinander) vereinigt worden; ihr Inhalt wird im folgenden

unter den Nummern I) bis V) kurz angegeben:

I)
$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+4a} - \cdots\right)^2$$
$$= 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \cdots - 2\int_0^1\int_0^y \frac{dx}{1+x^a}\,\frac{y^{a+1}}{1+y^a}\,dy$$

II) Die λ^{te} Potenz der Reihe
$$1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^\delta + \cdots$$
wird in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt, dere
bestimmt werden.

III)
$$1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdot$$
$$= \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}(\log 2)^2.$$

IV)
$$1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdot$$
$$= \frac{3\pi^2}{32}.$$

V) Die Reihe
$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \cdots,$$
wo die Nenner die Primzahlen > 2 sind und wo bei Primzahlen der For
Zeichen $-$ und bei Primzahlen der Form $4n+1$ das Zeichen $+$ steht, wir
schiedene Weisen in besser konvergente Reihen verwandelt. Daß die Re
konvergiere, wird ohne weiteres angenommen. Diese Annahme ist erst viel
worden.[1])

---

1) Siehe E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahle*
Bd. 1, S. 448.

VI. UNENDLICHE PRODUKTE UND KETTENBRÜCHE[1]

Wir beginnen den Bericht über die Arbeiten zur Lehre von den Kettenbrüchen besten mit der am 15. Juli 1757 der Berliner und $2^1/_4$ Jahre später der Petersburger A demie vorgelegten Abhandlung 281

Specimen algorithmi singularis

(*Opera omnia* I_{15}, p. 31—49), welche eine vollständige Lehre von dem formalen Teil Theorie gibt. Um einen Überblick zu bekommen, verwenden wir die moderne Matriz rechnung, welche hier dieselbe Rolle spielt, wie etwa der Infinitesimalkalkül für die Integ tionen von Archimedes.

In einem Kettenbruch seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Teilnenner, während die Teilzähler sein sollen. Der k^{te} Näherungsbruch sei $\frac{P_k}{Q_k}$. Nun seien folgenden Abkürzungen für M trizen gewählt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = M(a), \qquad \begin{pmatrix} Q_i & Q_k \\ P_i & P_k \end{pmatrix} = (i, k).$$

Dann gilt (§ 2)

$$M(a_1)\,M(a_2)\,\ldots\,M(a_n) = (n-1, n).$$

P_n sei als Funktion von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bezeichnet, dann w $P_{n-1} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

Kehrt man die Reihenfolge der Matrizen um und transponiert man sie — was den M nichts ändert —, so ist das Produkt gleich dem transponierten des vorigen. Hier bleibt P_n ungeändert, wodurch sich ergibt, daß das Klammersymbol seinen Wert nic ändert, wenn die Reihenfolge der Variabeln umgekehrt wird (§ 9), ferner wird

$$Q_n = (a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Da die Determinante von $(n-1, n)$ gleich $(-1)^n$ ist, so wird auch die zu $(n-1, n)$ verse Matrix sich durch dieselben Klammersymbole darstellen lassen. In § 20 werden

1) Der VI. Abschnitt dieser Übersicht ist von A. Speiser verfaßt.

Determinanten von $(n-1, n)$ festgestellt. Nun ersetze man im Produkt de $M(a_{k+2}) M(a_{k+3}) \ldots M(a_m)$ die erste Spalte durch 1,0 und bezeichne die so Matrix mit N, dann gilt die Gleichung $(k, k+1) N = (k, m)$. Vergleicht man minanten, so erhält man die Formeln der Paragraphen 25—27.

Die allgemeinste Formel, die EULER in § 31 erhält, kann so gewonnen sei $i < k < n$. Ferner sei gesetzt:

$$M(a_1) M(a_2) \ldots M(a_i) = N,$$

$$M(a_1) \ldots M(a_n) = M,$$

$$M(a_{k+1}) M(a_{k+2}) \ldots M(a_n) = L.$$

In der zu N inversen Matrix ersetze man die zweite Zeile durch 0,1, ebenso i inversen die erste Spalte durch 1,0 und bezeichne die so entstehenden Matrizen und L'. Berechnet man nun sorgfältig die Matrix $N' M L'$ und ihre Determinant man die allgemeinste Formel dieses Paragraphen.

§ 32 *ist das Assoziativgesetz der Matrixmultiplikation*. In § 34 wird d zweier beliebiger Näherungsbrüche berechnet mit Hilfe der obigen Formel für der sich so ergebenden Determinante.

Im Anschluß an diese Abhandlung ist 323 (I₃, p. 73) zu erwähnen. Die An PELLschen Gleichung $x^2 - d y^2 = 1$ wird dort so erbracht, daß auf $\sqrt{d}$ und 1 d ische Algorithmus angewendet und der zugehörige Kettenbruch aufgestellt wird. sich um den Nachweis, daß unter den Resten, die beim EUKLIDischen Algori stehen, eine Zahl auftritt, deren Norm gleich 1 ist. Hierzu werden die Formel verwendet. Der Nachweis des Satzes wird nicht vollständig geführt, indem der B fehlt, daß in der Periode des Kettenbruches die dort mit $2v$ bezeichnete Za auftritt. Schließlich sei noch die Abhandlung 454 (I₃, p. 310) erwähnt, wo die F von 323 verallgemeinert wird.

Die Abhandlung 71 vom 7. März 1737

De fractionibus continuis dissertatio

(*Opera omnia* I₁₄, p. 187—215) ist zeitlich die erste, welche EULER über Kette schrieben hat. Er berichtet zunächst über die Vorgeschichte, *vor allem* über brüche von BROUNCKER und WALLIS. Dann gibt er für den allgemeinen Kette Bildungsgesetz der Näherungsbrüche. In der obigen Bezeichnungsweise hat man, Zähler über b ist, die Matrix $M(b)$ durch

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

zu ersetzen. Die erhaltenen Resultate werden auf verschiedene Zahlen angewendet, insbeso
dere solche, die mit e in Verbindung stehen. Dies gibt Anlaß zur Verkürzung eines Kette
bruches mit den Teilnemern $a, m, n, b, m, n, c, m, n, \ldots$ Will man allgemein einen Kette
bruch K' bilden, bei dem der i^{te}, k^{te} und l^{te} Näherungsbruch eines *anderen* Kettenbruches
zu aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen werden, so hat man so vorzugehen: man m
die Matrix X suchen, welche der Gleichung genügt

$$(i, k)\ X = (k, l).$$

Daß die erste Spalte von X die Gestalt 0, 1 hat, folgt schon aus der Natur d
Gleichung. Aber der Übergang von (i, k) zu (k, l) kann nach früher durch folgende St
tionen bewerkstelligt werden: $(i, k) \to (i, i+1) \to (k, k+1) \to (k, l)$. Macht man d
für den soeben angegebenen Kettenbruch mit den Teilnemern $a, m, n, \ldots$ und behält ma
nur die Näherungsbrüche bei, deren Nummer durch drei teilbar ist, so erhält man ohn
Schwierigkeit einen Kettenbruch, dessen Teilzähler sogar wieder 1 sind. Er ist mit Au
nahme des ersten Termes in m und n symmetrisch (§ 23 und 24).

In § 28 wird zunächst ohne Beweis die Lösung der Riccatischen Gleichung

$$a y' + y^2 = x^{\frac{-4n}{2n+1}}$$

mit Hilfe eines Kettenbruches angegeben — eines der ersten Resultate Eulers in diese
Gebiet. Führt man jedoch statt x die dort angegebene Variable p und statt y den Au
druck im letzten Teilnenner ein, der mit z bezeichnet sei, so ergibt sich die Gleichung

$$a z' = 1 + \frac{2na}{p} z - z^2.$$

Bezeichnet man ferner mit z^* eine Lösung dieser Gleichung mit $n-1$ statt n, so finde
man sofort

$$z^* = \frac{(2n-1)a}{p} + \frac{1}{z},$$

woraus sich die Kettenbruchentwicklung unmittelbar ergibt.

In § 31—35 wird ein verwandter Kettenbruch aufgestellt und aus seinem Bildungs
gesetz seine Beziehung zur Riccatischen Differentialgleichung hergestellt.

Die Abhandlung 247 (vgl. S. LXXVI dieses Berichts)

De seriebus divergentibus

enthält eine wichtige Umwandlung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch, die man all
gemein folgendermaßen angeben kann: Es seien P und Q zwei Potenzreihen, deren kon

stante Glieder beidemal $= 1$ seien, ferner möge die Entwicklung von
beginnen. Jetzt setze man

$$P = Q + axR \qquad \text{und fahre fort}$$

$$Q = R + bxS.$$

Schreibt man die erste Gleichung in der Gestalt $\frac{P}{Q} = 1 + \frac{ax}{\frac{Q}{R}}$, so
mittelbar eine Kettenbruchentwicklung. Sie hat eine außerordentliche konv
Kraft, und mit ihr gelingt es EULER, der Reihe $\sum(-1)^n n! x^n$ eine Funkti
Er wählt für P diese Reihe und für Q die Funktion 1.

Die Abhandlung 122 vom 12. Januar 1739

De productis ex infinitis factoribus ortis

(*Opera omnia* I14, p. 260—290) gehört in das Gebiet der Betafunktionen un
Zusammenhang zu 254 (I17, p. 233). Da in der Vorrede zu I19, p. XLVIII
wird, so sei hier auf ein Referat verzichtet. Man wird auch für die folgend
mit Vorteil jene Übersicht zu Hilfe nehmen.

Aus EULERs Bemühungen, die Methoden von BROUNCKER wiederzufinden
Abhandlungen entstanden. Die Nummer 123 (der Petersburger Akademie am
vorgelegt)

De fractionibus continuis observationes

(*Opera omnia* I14, p. 291—349) beginnt mit der Umwandlung von Reihen
und umgekehrt, wobei aber die Teilsummen den Näherungsbrüchen gleich
satz zur vorher genannten Transformation. Indem gewisse Integrale erst
wickelt werden, gewinnt EULER Kettenbruchentwicklungen. In § 15 wen
WALLISschen Kettenbruch zu und zeigt, daß er einem unendlichen Produkt
Wert als Quotient zweier Integrale schon in der Abhandlung 122 erkannt i
die Interpolation von Reihen heran. Hier handelt es sich um folgendes P
ist eine Funktion $a(x)$ und gesucht eine Funktion $f(x)$, welche folgender Be

$$f(x)f(x+1) = a(x) \quad \text{für} \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Setzt man voraus, daß sowohl $a(x)$ als $f(x)$ mit wachsendem x nach 1 strebe

$$f(1) = \frac{a(1)a(3)\ldots}{a(2)a(4)\ldots}$$

Kennt man einen andern Ausdruck für das Wachsen von $f(x)$, etwa $b + c$
oder allgemein $b(x)$, so setze man $f(x) = b(x) + g(x)$, wo nun $g(x)$ ges

man hier x durch $x+1$ und multipliziert, so findet man

$$g(x) = A(x) + \frac{B(x)}{C(x) + g(x+1)},$$

wo A, B und C bekannte Funktionen sind. Dieser Ausdruck führt, wenn man ihn fortsetz unmittelbar auf einen Kettenbruch. Dies scheint EULER der wahre Weg gewesen zu sei auf dem BROUNCKER zu seinem Ausdruck geführt wurde. Aber die Kettenbrüche, auf die so geführt wird (§ 21—36), weichen noch zu sehr davon ab, und so gibt er (§ 37—48) d Überlegung noch eine neue Wendung, indem er eine Tafel mit doppeltem Eingang ve wendet. Hier sei auf eine Besprechung verzichtet, weil die Methode bei der Abhandlung 55 ausführlich zur Darstellung kommt.

Von § 49 ab wird eine direkte Methode zur Bildung von Kettenbrüchen ve wendet, die auch in anderen Abhandlungen vorkommt. Besteht in einer unendlichen Folg von Größen zwischen je drei aufeinanderfolgenden Termen eine lineare homogene B ziehung mit beliebigen veränderlichen Koeffizienten, so ergibt sich unmittelbar ein Kettenbruchentwicklung für den Quotienten der beiden ersten Terme. EULER geht nu von den Koeffizienten aus und nimmt sie als lineare Funktionen ihrer Nummer an (§ 49 Er sucht jetzt die Terme der Folge in Gestalt von Integralen zu gewinnen (§ 52—55 und erhält für einen Kettenbruch, der schon in § 34 summiert war, einen neuen Aus druck, dessen Übereinstimmung mit dem vorigen in § 56—59 nachgewiesen wir Hierauf gelangt er in das Gebiet der hypergeometrischen Funktion und gewinnt fü den Quotienten benachbarter Funktionen Kettenbruchentwicklungen. Gleichzeitig finde er weitere Relationen. Beispielsweise sei in § 65 die moderne GAUSSische Bezeichnungs weise eingeführt. Setzt man

$$p = 1, \quad q = -z, \quad \frac{c-b}{r} + 1 = \alpha, \quad \frac{c}{r} + 1 = \beta, \quad \frac{a}{r} + 1 = \gamma,$$

so wird die zweite Formel auf p. 338 zu folgender:

$$\frac{F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma;\ z)}{F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-1,\ \gamma-1;\ z)} = \frac{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)}{F(\alpha,\ \beta-1,\ \gamma-1;\ z)}.$$

Daß schon die beiden Zähler im wesentlichen übereinstimmen, hat EULER erst in 71 (Ic*, p. 43) nachgewiesen; vgl. S. XCIII.

Wenn EULER gleich darauf $b = c + r$ setzt, so handelt er gegen die Vorschri der vorigen Seite, und das Integral am Schluß des § 65 wird in einen Pol erstreck Aber die Formel ist insofern richtig, als sie auf den Fall $\beta = \gamma$ führt und daher i

der Tat $m(-\beta)$ herausfällt. Von § 75 ab zieht EULER die RICCATIsche gleichung heran.

Der Methode der Rekursionsformel ist die am 4. September 1755 der Akademie vorgelegte Abhandlung 522 gewidmet

De formatione fractionum continuarum

(*Opera omnia* I_{15}, p. 314—337). Der Ausdruck $x(a + bx + cx^2)$ verschwinde x gleich 0 oder gleich einer Wurzel α des quadratischen Faktors setzt. man ihn nach x, so erhält man drei Terme. Integriert man wieder von erhält man drei Integrale, deren Summe gleich 0 ist. Die Kettenbrüche, erhält, geben bei geschickter Wahl der Anfangsfunktion Berechnungen bestimm die zu den „*quantitates maxime transcendentes*" gehören. Der Fall von § 29 in der Abhandlung 606 (I_{18}, p. 244) für $\vartheta = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ durchgeführt und Beispielen illustriert.

Den Übergang von § 37—48 der Abhandlung 123 zu den weittragenden Ü von 553 bildet 550 (vom 4. Juli 1774)

De seriebus, in quibus producta ex binis terminis contiguis datam constituunt pr

(*Opera omnia* I_{15}, p. 383—399). Nach einigen vorläufigen Untersuchungen, d der Abhandlung 122, also der Produktentwicklungen von Betafunktionen gehören folgendes Problem gestellt:

Es soll $f(x)$ aus der Gleichung $f(x)f(x+1) = p + xq$ $(x = 1, 2, \ldots$ werden. Um von hier zu einem Kettenbruch zu gelangen, müßte man für d von $f(x)$ einen passenden Ansatz $g(x)$ machen, aber da $g(x)g(x+1)$ bloß linear darf, so läßt sich kein einfacher Ausdruck finden. EULER quadriert nun die G bekommt rechts einen in x quadratischen Ausdruck, so daß also $f^2(x)$ sich seh einen linearen Ausdruck annähern läßt, der natürlich sich von $p + qx$ nur scheidet. Diese Methode wird an einem etwas allgemeineren Fall in § 16—28 und alsdann auf das spezielle Problem angewendet. EULER erhält so auf Wegen Kettenbrüche für Quotienten der Betafunktionen.

Die Abhandlung 553 (vom 18. Mai 1772)

Observationes analyticae

(*Opera omnia* I_{16}, p. 400—434) befaßt sich mit folgendem Problem aus den hypergeometrischen Funktionen: Es ist eine Funktion zweier Veränderlichen ge welche bei Vermehrung der Argumente um ganze Zahlen eine linear gebrochene erfährt.

Der genaue Ansatz ist folgender:

$$f(x, y) = A(x, y) + \frac{P(y)}{f(x, y+1)}$$

$$f(x, y) = B(x, y) + \frac{Q(x)}{C(x, y) + f(x+1, y)}$$

Hierbei setzt EULER A, B und C als lineare Funktionen, P und Q als quadratische a
Die Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander, und EULER zeigt in § 7—9, daß m
zwischen den Koeffizienten der ersten Gleichung eine Relation annehmen muß, und d
hierauf die Koeffizienten der zweiten Gleichung völlig bestimmt sind. Diese Beziehung
ergeben sich als Vertauschungsrelationen von Matrizen, indem man den Übergang von $f(x,$
zu $f(x+1, y+1)$ auf zwei Wegen herstellen kann.

Jede der beiden obigen Gleichungen gestattet eine Kettenbruchdarstellung von $f(x, y$
indem man die eine Variable festhält und die andere um ganze Zahlen vermehrt (§ 11). D
Funktionen, die man so erhält, sind hypergeometrische Funktionen. Man kann das Verfahr
auch umkehren und ganze Zahlen subtrahieren. Auf diese Weise gewinnt man (§ 17) vi
Kettenbrüche für $f(x, y)$ und damit Funktionalgleichungen. So liefern die beiden Kette
brüche eine Beziehung zwischen Funktionen mit vertauschten x und y, und zwar mit Ve
wendung der dortigen Variablen und Koeffizienten:

$$p(A, B, C, D, E, F, m, n) = p(A, B, C, D, \mu, \nu, n, m) + \frac{1}{2}(A+B)(m-n) + \frac{1}{2}((G-C$$

Sie ist in der Tat eine Involution.

EULER fordert einen direkten Beweis dieser Relationen. Die Arbeit behandelt i
übrigen eine große Zahl von speziellen Fällen.

Einen mehr elementaren Charakter weist 593 (vom 18. September 1775)

De transformatione serierum in fractiones continuas

(*Opera omnia* I_{15}, p. 661—700) auf. Sie geht inhaltlich mit dem 18. Kapitel der *introduct*
in analysin infinitorum (I_8, p. 362 ff.) parallel. Die gegenseitige Umwandlung von Kette
brüchen und Reihen, wobei Näherungsbrüche und Teilsummen einander zugeordnet si
und daher Konvergenzfragen nicht berührt werden, wird ausführlich auseinandergesetzt u
an vielen Beispielen erläutert. Insbesondere wird in § 19 der BROUNCKERsche Kettenbru
aus der LEIBNIZschen Reihe hergeleitet.

Die kurze Abhandlung 616 (vom 11. Januar 1776)

De transformatione seriei divergentis etc.

(*Opera omnia* I_{16}, p. 34—46) ist, wie im *Summarium* schon bemerkt wird, eine Wied

holung gewisser Überlegungen von 247 (I₁₁, p. 585), über welche oben
ist. Immerhin sei auf die auch im *Summarium* hervorgehobene Verkürz
bruches in § 9 auf die Hälfte der Terme aufmerksam gemacht. Am Sch
gekehrt wie in 593 — der BROUNCKERsche Kettenbruch in die LEIBNI
gewandelt.

Die am 18. November 1779 vorgelegte Abhandlung 742

Observationes circa fractiones continuas etc.

(*Opera omnia* I₁₆*, p. 139—161) behandelt unter Anwendung immer kräft
die Summierung der Kettenbrüche mit den Teilnennern 1, 2, 3, ... und
$n, n+1, n+2, \ldots$ für ganzzahlige Werte von n. Zunächst werden m
Schranken die Werte für $n = 1, 2, 3, 4$ und 5 aufgesucht. Dann wird (§
beliebiges n dadurch bestimmt, daß der Kettenbruch nach oben zu fortges
Teilzähler $= 0$ entsteht, worauf durch Nullsetzen des Nenners ein endli
entsteht mit der gesuchten Summe als letztem Term. Die Umkehrung desse
endlichen Kettenbruch für diese Summe (§ 21). Aus den gefundenen We
ersten Fälle stellt EULER eine Rekursionsformel auf (§ 21). Diese wir
(§ 23—28) durch Zuhilfenahme einer Formel aus der Reihenlehre (§ 24,
genannte Formel findet man z. B. in den *Institutiones calculi differentialis*
(I₁₀, p. 52) abgeleitet.

In engstem Zusammenhange mit der Abhandlung 123 und insbes
Paragraphen 37—48 steht die Nummer 745 (vom 7. Februar 1780)

De fractionibus continuis WALLISII

(*Opera omnia* I₁₆*, p. 178—199). Nach einem kurzen Bericht über die
WALLIS stellt EULER das Problem, die Funktion $f(x)$ zu finden, welch
genügt

$$f(x)\,f(x+1) = (b + ax)^2 + c \quad \text{für} \quad x = 0, 1, 2, \ldots,$$

und zwar zunächst für den Fall $c = 0$. Er wendet zur Kettenbruchentw
mit doppeltem Eingang an, die in der Besprechung zu 553 auseinandergese
durch Spezialisierung die Kettenbrüche von WALLIS (§ 12), dann gibt e
wicklung (§ 15) und die Darstellung durch Integrale (§ 16). Hierauf geht er z
Problem über und behandelt es in derselben Weise. Der Kettenbruch in §
jenigen von § 47 der Abhandlung 553 über, wenn man $2f - a = s$, $a - 2b$
setzt. Wird c als eine positive Zahl angenommen, so werden die Teilz
bruches quadratische Ausdrücke der Nummer mit imaginären Wurzeln. Ent
die unendlichen Produkte imaginäre Faktoren enthalten und die Integral

granden. EULER zeigt, wie man zu reellen Ausdrücken gelangen kann und hierbe Integrale von der Gestalt

$$\int_0^1 \frac{x^{f-1} \cos (b \log x)\, dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

geführt wird. Er gibt zum Schlusse einen expliziten Ausdruck für solche Integrale bei lassung des Nenners.

In 750 (vom 20. März 1780)

Commentatio in fractionem continuam, qua illustris LA GRANGE potestates binomiales exp

(*Opera omnia* I16*, p. 232—240) macht EULER einige Bemerkungen zu einem Kettenb für $(1+x)^n$, den LA GRANGE aufgestellt hatte und der die bemerkenswerte Eigenschaf sitzt, daß er für positive und negative ganzzahlige n endlich ist. Durch einige Transfo tionen findet EULER einen Ausdruck, der nur n^2 enthält, und er entwickelt, teilweise Übergang zu komplexen Werten, u. a. arctg t und tg t in Kettenbrüche.

VII. BERECHNUNGEN DER ZAHL π

EULER hat sich zu den verschiedensten Zeiten seines Lebens mi[t] ... schäftigt: Wie berechnet man die Zahl π mit vorgeschriebener Genauigk[eit] ... Wege? Schon seine erste Arbeit über diesen Gegenstand, nämlich die ... vom 20. Februar 1738

De variis modi circuli quadraturam numeris proxime exprime[ndi]

(*Opera omnia* I_{14}, p. 245—259) enthält mehrere der später von ihm w... Verfahren. Nachdem er kurz den Gedankengang des Archimedes und die ... MACHIN $\left(100 \text{ Stellen mittels der Formel } \frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}\right)$ und ... wähnt hat, formt er den Rest der Reihe

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{1}$$

mittels seiner Summenformel um und leitet dann mittels des Additionsthe[orems der Arcus]tangens-Funktion

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \tag{2}$$

Formeln ab wie diese[1])

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99}.$$

Durch unbeschränkt wiederholte Anwendung der Formel (2) werden ... gefunden wie

---

1) Für $\frac{\pi}{4}$ gebraucht er in dieser Arbeit den Buchstaben α; für Arcus... er die Abkürzung At, in späteren Abhandlungen Atang (z. B. 280, I_{16}, S. 17) ... 809, I_{16^*}, S. 259). In der zweiten obiger Formeln (3) findet sich *Opera om[nia]* ... der rechten Seite infolge eines Druckfehlers At $\frac{1}{34}$ statt At $\frac{1}{31}$.

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \operatorname{arctg}\frac{1}{32} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \cdots \\
\frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{13} + \operatorname{arctg}\frac{1}{21} + \operatorname{arctg}\frac{1}{31} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}
\end{aligned}
$$

Auch Formeln der folgenden Art:

$$
(4)\qquad \operatorname{arctg}\frac{p}{p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{2}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} - \frac{1}{7p^7} - \frac{2}{9p^9} - \frac{1}{11p^{11}} + \cdots
$$

$$
(5)\qquad \operatorname{arctg}\frac{2p}{2p^2-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3\cdot 2p^3} - \frac{1}{5\cdot 2^2p^5} - \frac{1}{7\cdot 2^3p^7} + \frac{1}{9\cdot 2^4p^9} + \cdots
$$

$$
(6)\qquad \operatorname{arctg}\frac{3p(p^2-1)}{p^4-4p^2+1} = \frac{3}{p} + \frac{3}{5p^5} - \frac{3}{7p^7} - \frac{3}{11p^{11}} + \frac{3}{13p^{13}} + \cdots
$$

werden mitgeteilt; sie sind leicht zu bestätigen, indem man beide Seiten nach $x = \frac{1}{p}$ renziert, wobei die rechten Seiten in Summen von geometrischen Reihen übergehen. EULER zu diesen Reihen gelangt ist, wird nicht ersichtlich. Ihre Verwendungsmöglic deutet er durch Beispiele an; so liefert (6) für $p = 2$ den Wert arctg 18; addiert man arctg $\frac{1}{18}$ so erhält man nach (2) $\frac{\pi}{2}$. Zum Schlusse wird in nur losem Zusammenhang dem Vorhergehenden mit Benutzung der Formeln

$$
\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}} = 2\sin\frac{x}{2}, \qquad \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}} = 4\sin\frac{x}{4}, \qquad \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}} = 8\sin\frac{x}{8}, \cdots
$$

die Gleichung

$$
(7)\qquad \frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}\cdots
$$

abgeleitet und durch eine kurze Näherungsrechnung mittels der Logarithmentafel besti

Eine unendliche Menge von Formeln, die alle als Verallgemeinerungen der Forme anzusehen sind, gibt EULER in der Abhandlung 280

De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt

(*Opera omnia* I_{15}, p. 16—30), die am 23. November 1758 in der Berliner Akademie lesen, dann aber am 15. Oktober 1759 der Petersburger Akademie vorgelegt worden

Die in ihr mitgeteilten Formeln beruhen alle auf der Identität

$$\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_n = (\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2) + (\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_3)$$

$$(8) \qquad + (\operatorname{arctg} x_3 - \operatorname{arctg} x_4) + \cdots + (\operatorname{arctg} x_{n-}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{x_1 - x_2}{1 + x_1 x_2} + \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_3}{1 + x_2 x_3} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{x_n}{1 +}$$

und der sich aus ihr im Falle $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ ergebenden unendlichen Reihe für arc
bringt sehr viele Beispiele, in denen er $x_\nu = \frac{1}{a + (\nu - 1) b}$ setzt ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$
er beispielsweise, indem er weiter $a = 7$, $b = 25$ wählt, die Reihe

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{18} = \sum_{1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{25 \nu^2 + 11 \nu - 5}.$$

Umgekehrt bemerkt er: Wenn

$$M^2 + 4 = L^2 + 4 L N$$

ist, so läßt sich die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{L \nu^2 + M \nu + N}$$

summieren, und ihre Summe ist $\operatorname{arctg} \frac{2}{L + M}$. Zu verhältnismäßig einfache
Form (8) gelangt EULER auch, indem er für $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Näherungsbr
$\frac{ab + 1}{b}, \ldots$ des Kettenbruchs

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}$$

wählt. Schließlich zeigt er, daß umgekehrt aus

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{z} = \operatorname{arctg} \frac{1}{y_1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{y_2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y_3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{y_4} + \cdots$$

folgt

$$z = y_1 + \cfrac{y_1^2 + 1}{-y_1 + y_2 + \cfrac{y_2^2 + 1}{-y_2 + y_3 + \cfrac{y_3^2 + 1}{-y_3 + y_4 + \cdots}}}$$

Obwohl in dieser Abhandlung 280 von der Berechnung der Zahl π nirg
ist, wurde sie doch in die VII. Gruppe aufgenommen; denn sie knüpft unmi
zuvor besprochene Abhandlung 74 an.

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{2-x} = \int_0^x \frac{dt}{2-2t+t^2} = 2\int_0^x \frac{dt}{t^4+4} + 2\int_0^x \frac{t\,dt}{t^4+4} + \int_0^x \frac{t^2\,dt}{t^4+4}$$

(9)

$$= \frac{x}{2} \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{4\nu+1}\left(\frac{x^4}{4}\right)^\nu + \frac{x^2}{4} \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}\left(\frac{x^4}{4}\right)^\nu + \frac{x^3}{4} \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{4\nu+3}\left(\frac{x^4}{4}\right)^\nu.$$

Die rechte Seite ist für $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{4}$ leicht mit einiger Genauigkeit zu berechne und liefert dann die Werte $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ und $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$, aus denen sich π vermöge der Gleichun

$$\pi = 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$$

ergibt. Dieses Berechnungsverfahren bildet den Inhalt der Abhandlung 706 vom 17. Juni 177

De novo genere serierum rationalium et valde convergentium, quibus ratio peripheriae ad diametrum exprimi potest

(*Opera omnia* I₁₆*, p. 21—27).

Zehn Tage vorher hatte Euler der Petersburger Akademie die Abhandlung 705 vorgelegt

Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum vero proxime definiendam maxime sunt accomodatae

(*Opera omnia* I₁₆*, p. 1—20). In ihr wird zur Berechnung von π ein in den bisher be sprochenen Arbeiten nicht vorkommendes, sehr brauchbares Hilfsmittel benutzt, nämlic die Reihe[1])

$$(10) \qquad \operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2}\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 8}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \cdots\right).$$

1) Aus Gleichung (68) S. XXXVI ergibt sich durch Differentiation

$$\arcsin x = x\sqrt{1-x^2}\left(1 + \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^4 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^6 + \cdots\right),$$

und hieraus folgt (10) durch die Substitution

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} t, \quad \text{also} \quad x^2 = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad x\sqrt{1-x^2} = \frac{t}{1+t^2}.$$

Die Reihe (10) findet sich zuerst bei Johann Bernoulli: *Opera omnia* t. 4, *Lausannae et Ge nevae* 1742, p. 24. Sie wurde schon vor Euler in Verbindung mit Formeln wie (11), (12) zu Berechnung von π herangezogen durch Charles Hutton: *Philosophical Transactions*, Bd. 66, 1776 S. 476—492.

EULER beweist sie auf mehrere Weisen und benutzt sie im Zusam[…]
legungssätzen wie

$$\pi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \tag{11}$$

$$\pi = 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{7}, \tag{12}$$

$$\pi = 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{79} \tag{13}$$

zur Berechnung von π. Insbesondere liefert (13) den Ansatz, der wohl [...] eignetste ist, um den *Dezimalbruch für π zu finden:*

$$\pi = \frac{28}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{2}{100} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$+ \frac{30336}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{144}{100000} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \cdots\right].$$

In der im ersten Bande der *Opera postuma* erschienenen Abhandlun[…]

Series maxime idoneae pro circuli quadratura proxime inveni[…]

(*Opera omnia* I_{16^*}, p. 267—283), die sonst im wesentlichen nur eine Wie[…] eben besprochenen Abhandlung 705 ist, berechnet EULER mit dieser Form[…] malstellen, wozu er, wie er mitteilt, nur ungefähr eine Stunde gebraucht [...]

Es bleiben noch zwei Arbeiten EULERS zu besprechen, in denen zur[…] π Wege eingeschlagen werden, die untereinander und von den in den bi[…] Arbeiten eingeschlagenen ganz verschieden sind; es sind dies die Abhan[…] 23. März 1739

Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam invenien[…]

(*Opera omnia* I_{14}, p. 350—363) und die Abhandlung 275

Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam s[…]

die am 20. Juli 1758 der Berliner und am 15. Oktober 1759 der Peter[…] vorgelegt worden ist (*Opera omnia* I_{16}, p. 1—15). In der letzteren beweist[…] tigkeit einer Folge von Konstruktionen des DESCARTES, die mit immer grö[…] lich beliebig großer Genauigkeit den Durchmesser des Kreises liefern, dess[…] dem eines gegebenen Quadrats ist.

EULER zeigt, daß die Reihe

$$\operatorname{tang}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{\pi}{32} + \cdots = \frac{4}{\pi}[…]$$

Die Abhandlung 125 beginnt mit der Berechnung des Integrals

$$\operatorname{arctg} t = \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau^2};$$

die Strecke $0 \ldots t$ wird in n gleiche Teile geteilt und $\operatorname{arctg} t$ näherungsweise durch d Rechteckformel

$$\frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \cdots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2} = s$$

berechnet; dann wird die Differenz $\operatorname{arctg} t - s$ mittels der EULERschen Summenformel ab geschätzt und schließlich $t = 1$ gesetzt, wodurch sich folgende Formel für $\frac{\pi}{4}$ ergibt:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

$$(14) \qquad + \frac{1}{4n} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2\cdot 2n^2} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{2^3\cdot 6n^6} + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{2^5\cdot 10n^{10}} - \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2^7\cdot 14n^{14}}$$

$$+ \frac{43867}{19\cdot 42}\cdot\frac{1}{2^9\cdot 18n^{18}} - \frac{854513}{6\cdot 23}\cdot\frac{1}{2^{11}\cdot 22n^{22}} + \cdots$$

(Die *Faktoren* $\frac{1}{6}, \frac{1}{42}, \frac{5}{66}, \frac{7}{6}$ usw. sind die BERNOULLIschen Zahlen B_2, B_6, B_{10}, B_{14} usw.

Unter der Annahme $n = 5$ gewinnt er aus (14) π auf 12 Dezimalstellen richtig.

EULER erkennt (§ 15) sehr richtig, daß die Reihe (14) nach der heutigen Bezeich nungsweise „halbkonvergent" ist; er sagt, je größer n sei, um so genauer liefere sie π doch müsse man sie an einer *geeigneten* Stelle abbrechen, denn sie divergiere, und zwar s sehr, daß auch die Reihe, die nach Multiplikation des ν^{ten} Gliedes mit x^ν entstehe, divergen bleibe, wie klein auch x sei; der Quotient $|B_{2\nu-2}| : |B_{2\nu-4}|$ bleibe nämlich (für $\nu > 2$ oberhalb $\frac{(\nu-2)(2\nu-3)}{2\pi^2}$ [1]) und $|B_{2\nu+2}| : \nu^2 |B_{2\nu}|$ sei asymptotisch gleich $\frac{1}{\pi^2}$. Daraus schließ er richtig, daß das dem Betrage nach kleinste Glied der Reihe (14) eine Nummer habe, di in der Nähe von $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$ liege. Mit sicherem Gefühl sagt EULER, daß man bei jenem Gliede di Summation abbrechen *müsse*. Eine Begründung dieses Gefühls oder die Angabe einer oberen Grenze des Fehlerbetrages durfte man von ihm und seiner Zeit nicht verlangen. Die Rest

1) Das folgt leicht aus (3) S. IX.

abschätzung, die er in § 16 versucht, entbehrt der Begründung. Ist P das
mit dem kleinsten Betrage folgende, so hat zwar EULER recht, wenn
Glied und die nächstfolgenden stimmten ungefähr mit den Anfangsgliedern
schen Reihe

$$P\left(1 - \frac{4\mu^4}{\pi^4 n^4} + \left(\frac{4\mu^4}{\pi^4 n^4}\right)^2 - \left(\frac{4\mu^4}{\pi^4 n^4}\right)^3 + \cdots\right) \tag{15}$$

überein (wo μ die Anzahl der beibehaltenen Glieder, also die Nummer des k
der Reihe (14) ist), aber es ist kein Grund einzusehen, warum die Summe

$$\frac{\pi^4 n^4 P}{\pi^4 n^4 + 4\mu^4}$$

der geometrischen Reihe (15) als Abschätzung des Restes hinzugefügt werd

München, im Januar 1935.

GEORG

INDEX

Insunt in hoc volumine indicis ENESTROEMIANI commentationes

705, 706, 709, 710, 722, 726, 736, 742, 743, 745, 746, 747, 750, 768, 809, 810, 819

736. De summatione seriorum in hac forma contentarum

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^6}{36}+\text{etc.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg **3** (*1809/10*), *1811*, p. 26

742. Observationes circa fractiones continuas in hac forma contentas

$$S=\cfrac{n}{1+\cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4+\text{etc.}}}}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 4 (1811), 1813, p. 52—7

743. De serie maxime memorabili, qua potestas binomialis quaecunque primi potest . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 4 (1811), 1813, p. 75—8

745. De fractionibus continuis Wallisii . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg **5** (*1812*), *1815*, p. 24—4

746. Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas d rentiales investigandi . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg **5** (1812), 1815, p. 45—5

747. De seriebus memorabilibus, quibus sinus et cosinus angulorum tiplorum exprimere licet . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812), 1815, p. 57—7

750. Commentatio in fractionem continuam, qua illustris La Grange pot tes binomiales expressit . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 6 (1813/14), 1818, p. 3-

768. De unciis potestatum binomii earumque interpolatione . . . . .

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg **9** (1819/20), 1824, p. 57

INVESTIGATIO QUARUNDAM SERIERUM QUAE AD RATIONEM PERIPHERIAE CIRCULI AD DIAMETRUM VERO PROXIME DEFINIENDAM MAXIME SUNT ACCOMMODATAE[1])

Conventui exhibita die 7. Iunii 1779

Commentatio 705 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1793), 1798, p. 133—149

Summarium ibidem p. 167—168

SUMMARIUM

Tous ceux qui après VAN CEULEN[2]) ont cherché par approximation la circonférence π un cercle, dont le diametre = 1, se sont servis de la série connue de LEIBNITZ, en vertu laquelle l'arc s d'un cercle, dont le rayon = 1, est exprimé par sa tangente t de la nière suivante:

$$s = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.}$$

i donne pour la circonférence entiere

$$\pi = \sqrt{12} \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \text{etc.}\right)$$

1) Confer hac cum dissertatione Commentationem 74 indicis ENESTROEMIANI, *Leonhardi Euleri Opera omnia* vol. I14, p. 245—259 et Commentationem 809 huius voluminis. C. B.

2) Voir la note 2 au bas de la page 3. C. B.

Feu M. EULER avoit déjà proposé[2]), dans le neuvieme volume des anciens Comm… pour l'année 1737, une méthode de diminuer ce travail énorme, en faisant usage de la … sition des arcs, et nommément de l'expression

$$\frac{\pi}{4} = \text{A tang.}\,\frac{1}{2} + \text{A tang.}\,\frac{1}{3}$$

qui donne

$$\frac{\pi}{4} = \begin{Bmatrix} +\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \text{etc.} \end{Bmatrix}.$$

Le travail devient encore plus léger, quand on se sert de la décomposition

$$\pi = 8\ \text{A tang.}\,\frac{1}{3} + 4\ \text{A tang.}\,\frac{1}{7};$$

les séries qui en résultent deviennent très convergentes; le seul inconvénient qui en… un peu l'avantage est la division successive par 49, qui n'est pas assez commode.

Pour remédier à cet inconvénient, M. EULER donne ici une autre expression … par sa tangente t, savoir

$$s = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{tt}{1+tt}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^3 + \text{etc.}\right],$$

qu'il *démontre de deux manières différentes* et qui, en mettant $t = \frac{1}{3}$ et puis $t =$ … l'expression

$$\pi = 8\ \text{A tg.}\,\frac{1}{3} + 4\ \text{A tg.}\,\frac{1}{7},$$

donne la circonférence exprimée par les deux séries suivantes:

$$\pi = \begin{Bmatrix} +\frac{24}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ +\frac{28}{50}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \text{etc.}\right] \end{Bmatrix}$$

qui sont non seulement très convergentes, mais, de plus, d'un usage très commod… facilité avec laquelle on peut déduire chaque terme de son précédent.

L'avantage devient encore plus grand, si l'on se sert de la décomposition

$$\pi = 20\ \text{A tang.}\,\frac{1}{7} + 8\ \text{A tang.}\,\frac{3}{79};$$

car elle fournit des séries encore plus convergentes et douées des mêmes avanta… tivement à la commodité du calcul. Ces séries sont:

2) Voir la note 1 au bas de la page 3. C. B.

$$\left(+ \frac{30336}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{144}{100000}\right)^3 + \text{etc.}\right]\right),$$

dont la seconde est surtout remarquable par la propriété de donner la somme des ci
premiers termes exactement par une fraction décimale de 26 chifres, tous les suivans ét
des zéros.

1. Qui post LUDOLPHIUM A CEULEN[1]) veram rationem peripheriae ad di
metrum proxime assignare susceperunt, usi sunt serie LEIBNITIANA[1]), qua p
circulo, cuius radius $= 1$, arcus quicunque s per suam tangentem t ita e
primi solet, ut sit

$$s = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.},$$

quae eo magis convergit, quo minor tangens t accipiatur. Sed quia arcus
ad totam peripheriam, vel ad arcum quadrantis cognitam rationem tene
debet, pro arcu s vix minorem valorem assumere licet, quam 30 graduu
quippe cuius tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, quo valore in serie substituto, si semiperipher
circuli per π designetur, erit $\pi = 6s$, unde deducitur haec series

$$\pi = \sqrt{12} \times \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \text{etc.}\right).$$

Hinc patet calculum huius seriei ante institui non posse, quam radix qua
drata ex numero 12 ad tot figuras decimales fuerit extracta, ad quot valo
ipsius π desideratur, quem stupendum laborem olim ABRAHAMUS SHARP[2]) usqu
ad 72 figuras decimales, tum vero Professor Greshamiensis MACHIN[3]) a
100 figuras est exsecutus. Multo maiorem autem laborem sollertissimus calcu
lator Gallus DE LAGNY[4]) est exantlare coactus, qui ex eadem serie valore
ipsius π adeo usque ad 128 figuras decimales determinavit, qui labor cert
plus quam Herculeus est censendus, cum tamen extractio radicis ex numero 1
tantum tanquam opus praeliminare sit spectandum, istam enim immensar

1) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I14, notam ad p. 178 adiectam. C. B.
2) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I11, notam ad p. 249 adiectam. C. B.
3) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I14, notam 1 ad p. 246 adiectam. C. B.
4) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I14, notam 2 ad p. 246 adiectam. C. B.

fractionem decimalem demum opus erat continuo per 3 dividere, iusuper singuli termini per numeros impares 3, 5, 7, 9, 11 etc. ord debebant. Cum igitur istius seriei quilibet terminus in hac forma c

$$\frac{+\sqrt{12}}{(2n+1)3^n},$$

ubi n denotat numerum terminorum, tot terminos computari oportet,

$$\frac{(2n+1)3^n}{\sqrt{12}} = 10^{128},$$

sive, logarithmis vulgaribus sumendis, donec fiat

$$l(2n+1) + nl3 - \tfrac{1}{2}l12 = 128;$$

unde primam partem $l(2n+1)$ negligendo colligitur

$$n = \frac{128 + \frac{1}{2}l12}{l3}$$

hincque prodit terminorum numerus aliquanto minor quam 269; ex quo maxime est mirandum quemquam fuisse repertum, qui hunc laborem exsequi sit ausus.

2. Iam dudum[1]) autem proposui methodum istum laborem sublevandi, postquam scilicet ostendi duos arcus satis exiguos in h adhiberi posse, quorum quidem neuter ad peripheriam teneat ratio nalem, quorum tamen summa talem rationem teneat. Tales arcus

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{2} + \text{A tang.}\,\frac{1}{3} = \text{A tang.}\,1 = \frac{\pi}{4},$$

ita ut

$$\pi = 4\,\text{A tang.}\,\frac{1}{2} + 4\,\text{A tang.}\,\frac{1}{3},$$

1) Confer Commentationis 74 indicis ENESTROEMIANI supra laudatae §§ 11 *LEONHARDI EULERI Opera omnia* vol. I14, p. 262. C. B.

quorum uterque per nostram seriem facile evolvitur, cum sit

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\text{etc.}$$

et

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\text{etc.},$$

ubi termini illius seriei fere in ratione quadrupla decrescunt, huius vero in ratione fere noncupla ideoque multo magis convergunt, quam series ab Auctoribus memoratis usurpata. Praecipue vero notandum est hoc modo nullam extractionem radicis requiri sicque fere maximam partem illius laboris evitari; praeterea etiam singuli termini harum novarum serierum facillime in fractiones decimales convertuntur; quae quia figurae certum ordinem, imprimis ab initio servant, computus ad quotcunque figuras sine magno labore extenditur.

3. Multo magis autem labor diminuetur, si adhuc minores arcus in subsidium vocentur. Cum enim sit

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{2}=\text{A tang.}\,\frac{1}{3}+\text{A tang.}\,\frac{1}{7},$$

erit nunc

$$\pi=8\,\text{A tang.}\,\frac{1}{3}+4\,\text{A tang.}\,\frac{1}{7},$$

sicque in serie priore termini statim in ratione noncupla decrescunt, in posteriore vero adeo 49 vicibus evadunt minores. Unicum autem, quod hic desiderari posset, in hoc consistit, quod non tam facile per 49 continua divisio instituatur optandumque fuisset, ut ista divisio vel per potestatem denarii vel alius numeri simplicem ad 10 rationem tenentis expediri posset.

4. Incidi autem nuper in modum prorsus singularem, quo huic incommodo felicissimo successu occurritur atque adeo series praecedentes magis convergentes redduntur. Constat autem iste modus in idonea transformatione seriei LEIBNITIANAE, quae per sequentes operationes procedit.

$$s\;=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\text{etc.},$$

$$stt=\qquad t^3-\frac{t^5}{3}+\frac{t^7}{5}-\frac{t^9}{7}+\text{etc.},$$

$$s + stt = \quad t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{3\cdot 5} t^5 + \frac{2}{5\cdot 7} t^7 - \text{etc.} = t +$$

ergo

$$s' = \frac{2}{3} t - \frac{2}{3\cdot 5} t^3 + \frac{2}{5\cdot 7} t^5 - \frac{2}{7\cdot 9} t^7 + \text{etc.},$$

hinc

$$s'tt = \qquad \frac{2}{1\cdot 3} t^3 - \frac{2}{3\cdot 5} t^5 + \frac{2}{5\cdot 7} t^7 - \text{etc.}$$

$$s'(1+tt) = \quad \frac{2}{3} \quad t + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} t^3 - \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7} t^5 + \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9} t^7 - \text{etc.} =$$

ergo

$$s'' = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5} t - \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7} t^3 + \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7\cdot 9} t^5 - \text{etc.},$$

$$s''tt = \qquad \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5} t^3 - \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7} t^5 + \text{etc.}$$

$$s''(1+tt) = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \; t + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \; t^3 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} \; t^5 + \text{etc.} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$$

$$s''' = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} t - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} \; t^3 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} \; t^5 - \text{etc.},$$

$$s'''tt = \qquad + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \; t^3 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} \; t^5 + \text{etc.}$$

$$s'''(1+tt) = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} t + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} t^3 - \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} t^5 + \text{etc.}$$

etc.

5. Colligamus iam singulas substitutiones hic factas, quae sunt

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{s'tt}{1+tt},$$

$$s' = \frac{2t}{3(1+tt)} + \frac{s''tt}{1+tt},$$

$$s'' = \frac{2\cdot 4t}{3\cdot 5(1+tt)} + \frac{s'''tt}{1+tt},$$

$$s''' = \frac{2\cdot 4\cdot 6t}{3\cdot 5\cdot 7(1+tt)} + \frac{s''''tt}{1+tt}$$

etc.

Quodsi iam valores posteriores in praecedentibus substituantur, pro a
sequens obtinebitur nova series

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4} + \text{etc.},$$

quae ad sequentem formam commodiorem reducitur

$$s = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{tt}{1+tt}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^3 + \text{etc.}\right],$$

ubi singuli termini adhuc facilius evolvuntur quam in serie praeced
propterea quod ex quolibet termino sequens immediate determinari p
Ita ex primo termino reperitur secundus, si ille per $\frac{2}{3}$ et per $\frac{tt}{1+tt}$ m
plicetur (Multiplicatio autem per $\frac{2}{3}$ fit, dum pars tertia subtrahitur). S
dus per $\frac{4}{5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)$ multiplicatus dat tertium; hic vero per $\frac{6}{7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)$ mul
catus dat quartum et ita porro. Facillime autem per fractiones $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$
multiplicatur. Praeterea vero haud exiguum est lucrum, quod omnes te
sunt positivi, eorumque ergo sola additio arcum quaesitum s suppeditat

6. Ad hanc autem novam seriem primum methodo longe alia sum
ductus, quam hic apposuisse operae erit pretium. Cum sit

$$s = \int\frac{\partial t}{1+tt},$$

extendatur, ita ut futurum sit $s = A$ tang. a.

7. Tum vero huius formulae denominatorem $1 + tt$ sub
praesento

$$1 + aa - (aa - tt)$$

hincque porro sub hac

$$(1 + aa)\left(1 - \frac{aa - tt}{1 + aa}\right),$$

quo facto fractio $\frac{1}{1 + tt}$ evolvetur in hanc seriem

$$\frac{1}{1 + aa}\left[1 + \frac{aa - tt}{1 + aa} + \left(\frac{aa - tt}{1 + aa}\right)^2 + \left(\frac{aa - tt}{1 + aa}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$

sicque erit

$$s = \frac{1}{1 + aa}\int \partial t\left[1 + \frac{aa - tt}{1 + aa} + \left(\frac{aa - tt}{1 + aa}\right)^2 + \text{etc.}\right],$$

postquam scilicet integratio a $t = 0$ usque ad $t = a$ fuerit
statim patet pro primo termino fore

$$\int \partial t = a,$$

pro secundo autem

$$\int \partial t(aa - tt) = \frac{2}{3} a^3.$$

8. At vero, quo facilius omnes termini sequentes integre
aequationem evolvi conveniet

$$\int \partial t(aa - tt)^{n+1} = A\int \partial t(aa - tt)^n + Bt(aa - tt)^{n+1}$$

quae differentiata ac per $\partial t(aa - tt)^n$ divisa praebet

$$aa - tt = A + B(aa - tt) - 2(n + 1)Btt,$$

ubi duplicis generis termini occurrunt, scilicet mere constant
tt affecti, qui seorsim se mutuo tollere debent.

involvat, quod evenit statuendo

$$A = 2(n+1)Baa,$$

quo facto, si aequatio insuper per $aa - tt$ dividatur, prodibit

$$1 = B(2n+3);$$

unde colligitur

$$B = \frac{1}{2n+3} \quad \text{hincque} \quad A = \frac{2(n+1)}{2n+3}aa$$

sicque aequatio nostra assumta iam erit

$$\int \partial t (aa - tt)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} aa \int \partial t (aa - tt)^n + \frac{t}{2n+3}(aa - tt)^{n+1}.$$

Quare si integralia a $t = 0$ usquo ad $t = a$ extendantur, postremum membrum sponte abit in nihilum sicque habebimus hanc reductionem generalem

$$\int \partial t (aa - tt)^{n+1} = \frac{2(n+1)aa}{2n+3} \int \partial t (aa - tt)^n.$$

10. Iam ope huius reductionis ex quolibet termino nostrae seriei facillime terminus sequens assignari poterit. Quodsi enim loco exponentis n successive omnes valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. ponamus, sequentia integralia nanciscemur

$$\int \partial t (aa - tt) = \frac{2}{3} a^3,$$

$$\int \partial t (aa - tt)^2 = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a^5,$$

$$\int \partial t (aa - tt)^3 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} a^7,$$

$$\int \partial t (aa - tt)^4 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} a^9$$

etc.

$$s = \text{A tang. } a = \frac{1}{1+aa}\left(a + \frac{\frac{2}{3}a^3}{1+aa} + \frac{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a^5}{(1+aa)^2} + \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}a^7}{(1+aa)^3} + \text{etc.}\right.$$

unde, si loco a restituamus t, orietur ipsa series methodo praeced venta, scilicet

$$s = \text{A tang. } t = \frac{t}{1+tt}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{tt}{1+tt}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{tt}{1+tt}\right)^3 + \right.$$

12. Nunc igitur hanc novam seriem ad nostrum institutum pro commodemus, et quoniam supra primo hanc habuimus aequationem

$$\pi = 4 \text{ A tang. } \frac{1}{2} + 4 \text{ A tang. } \frac{1}{3},$$

pro priore parte, ubi $t = \frac{1}{2}$, obtinebimus hanc seriem

$$\text{A tang. } \frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right),$$

pro altera autem parte, ubi $t = \frac{1}{3}$, erit

$$\text{A tang. } \frac{1}{3} = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{10^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{10^3} + \text{etc.}\right);$$

consequenter valor ipsius π per binas sequentes series exprimetur

$$\pi = \left\{\begin{array}{l} \quad\frac{16}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{10}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ + \frac{12}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \text{etc.}\right]\end{array}\right\};$$

propterea quod hic in factoribus habem
ipsum denarium atque hae series adeo magis convergunt.

13. Lucrum autem adhuc multo erit maius, si forma

$$\pi = 8\,\mathrm{A}\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{3} + 4\,\mathrm{A}\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{7}$$

per novam seriem evolvatur, cuius pars prior iam est evoluta; pro alter autem, ubi $t = \frac{1}{7}$, nunc habebimus

$$\mathrm{A}\ \mathrm{tang.}\ \frac{1}{7} = \frac{7}{50}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{50^3} + \mathrm{etc.}\right).$$

Hinc igitur nanciscemur sequentes series pro valore semiperipheriae π inda gando

$$\pi = \left\{\begin{aligned} &\frac{24}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \mathrm{etc.}\right]\\ &+\frac{28}{50}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{2}{100}\right)^3 + \mathrm{etc.}\right]\end{aligned}\right\};$$

haeque duae series sunt aptissimae ad valorem ipsius π ad quotcunque figura decimales exprimendum, propterea quod singuli termini ex praecedentibu facillime formantur atque adeo prioris seriei termini iam in ratione decupl posterioris vero in quinquies decupla decrescunt. Unde, si quis hunc valorem ad 128 figuras definire vellet, pro priore serie computare deberet termino centum viginti octo, posterioris vero septuaginta quinque tantum.

14. Quo usus harum seriarum clarius appareat, utriusque seriei oct terminos priores in fractiones decimales evolvamus; eritque

PRO PARTE PRIORE

term.	I.	= 2,4 etc.
—	II.	= - 1 6 otc.
—	III.	= - - 1 2 8 etc.
—	IV.	= - - - 1 0 9,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4
—	V.	= - - - - - 9 7,5 2 3 8 0 9,5 2 3 8 0 9,5 2 3 8 0 9,5 2
—	VI.	= - - - - - - 8,8 6 5 8 0 0,8 6 5 8 0 0,8 6 5 8 0 0,8 6
—	VII.	= - - - - - - - 8 1,8 3 8 1 6 1,8 3 8 1 6 1,8 3 8 1 6 1,
—	VIII.	= - - - - - - - - 7 6,3 8 2 2 8 4,3 8 2 2 8 4,3 8 2 2 8
Pars	I.	= 2,5 7 4 0 0 4 4 2 7 | 2 3 1 4 3 5 2 3 1 4 3 5 | 2 3 1 4 3

PRO PARTE POSTERIORE

term.	I.	= 0,5 6 0 etc.
—	II.	= - - - 7 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
—	III.	= - - - - 1 1 9 4 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
—	IV.	= - - - - - - 2 0 4 8 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
—	V.	= - - - - - - - - 3 6 4 0 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
—	VI.	= - - - - - - - - - - 6 6 1 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7 9 7
—	VII.	= - - - - - - - - - - - 1 2 2 2, 1 1 6 5 5 0, 1 1 6 5 5 0
—	VIII.	= - - - - - - - - - - - - - 2 2 8 1 2, 8 4 2 2 6 8, 8 4 2
Pars	II.	= 0,5 6 7 5 8 8 2 1 8 4 1 6 6 5 1 3 1 | 4 1 2 5 8 7 | 4 1 2

Hinc patet istas summas octo priorum terminorum, ob revolutiones
in figuris occurrentes, sine ullo labore ad quotcunque figuras contin

15. Ex hoc schemate iam statim verus valor ipsius π ad o
usque assignari poterit. Cum enim octo priorum terminorum sum

$$\text{partis prioris} \quad = 2{,}5\,7\,4\,0\,0\,4\,4\,3,$$

$$\text{partis posterioris} = 0{,}5\,6\,7\,5\,8\,8\,2\,2,$$

$$\text{erit valor ipsius } \pi = 3{,}1\,4\,1\,5\,9\,2\,6\,5,$$

ubi ne in ultima quidem figura erratur. Facile autem iste calculus ad pl figuras extendi potest, propterea quod termini octavum subsequentes ex ipso sine difficultate computantur. Est enim

PRO PARTE PRIORE

$$\text{terminus IX.} = \frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{17}\right)\ \text{VIII.}$$

$$\text{—}\quad \text{X.} = \frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{19}\right)\ \text{IX.}$$

$$\text{—}\quad \text{XI.} = \frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{21}\right)\ \text{X.}$$

etc.,

PRO PARTE POSTERIORE

$$\text{terminus IX.} = \frac{2}{100}\left(1-\frac{1}{17}\right)\ \text{VIII.}$$

$$\text{—}\quad \text{X.} = \frac{2}{100}\left(1-\frac{1}{19}\right)\ \text{IX.}$$

$$\text{—}\quad \text{XI.} = \frac{2}{100}\left(1-\frac{1}{21}\right)\ \text{X.}$$

etc.

16. Quo usus harum formularum magis elucescat, quaeramus valo ipsius π usque ad 16 figuras; et calculus erit

PRO PARTE PRIORE

I. . . . VIII.	=	2,5 7 4 0 0 4 4 2 7 2 3 1 4 3 5 2 3
term. IX.	=	- - - - - - - - - 7 1 8 8 9 2 0 8 8
— X.	=	- - - - - - - - - - - 6 8 1 0 5 5 6 6
— XI.	=	- - - - - - - - - - - - 6 4 8 6 2 4 4
— XII.	=	- - - - - - - - - - - - - 6 2 0 4 2 3
— XIII.	=	- - - - - - - - - - - - - - 5 9 5 6 1
— XIV.	=	- - - - - - - - - - - - - - - 5 7 3 5
— XV.	=	- - - - - - - - - - - - - - - - 5 5 4
— XVI.	=	- - - - - - - - - - - - - - - - - 5 4
Summa	=	2,5 7 4 0 0 4 4 3 5 1 7 3 1 3 7 4 8

PRO PARTE POSTERIORE

I. . . . VIII.	=	0,5 6 7 5 8 8 2 1 8 4 1 6 6 5 1 3 1
term. IX.	=	- - - - - - - - - - - - - - - - 4 2 9
— X.	=	- - - - - - - - - - - - - - - - - - 8
Pars II.	=	0,5 6 7 5 8 8 2 1 8 4 1 6 6 5 5 6 8[1])
Pars I.	=	2,5 7 4 0 0 4 4 3 5 1 7 3 1 3 7 4 8
hinc π	=	3,1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 1 6[2])

17. Possunt vero etiam aliae huiusmodi formulae pro π inveniri, adhuc magis convergant ac pariter per potestates denarii procedant. enim in genere sit

$$A\ \text{tang.}\ \frac{\alpha}{a} = A\ \text{tang.}\ \frac{\beta}{b} + A\ \text{tang.}\ \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha\beta + ab},$$

si sumamus $t = \frac{\alpha}{a}$ vel $\frac{\beta}{b}$, erit

$$\frac{tt}{1+tt} = \frac{\alpha\alpha}{\alpha\alpha + aa} \quad \text{vel} \quad \frac{\beta\beta}{\beta\beta + bb},$$

sumto vero

$$t = \frac{\alpha b - \beta a}{\alpha\beta + ab}$$

1) Editio princeps: 7. C. B.

2) Editio princeps: 5. Correctae ultimae duae figurae sunt 23. C. B.

18. Quoniam igitur habuimus hanc formulam

$$\pi = 8 \text{ A tang.} \frac{1}{3} + 4 \text{ A tang.} \frac{1}{7},$$

loco prioris arcus ope reductionis allatae duos alios introducamus p scilicet $\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{3}$; et pro $\frac{\beta}{b}$ sumamus $\frac{1}{7}$ fietque tertius arcus $=$ A tang. $\frac{2}{11}$, it

$$\text{A tang.} \frac{1}{3} = \text{A tang.} \frac{1}{7} + \text{A tang.} \frac{2}{11},$$

quo valore substituto formula nostra erit

$$\pi = 12 \text{ A tang.} \frac{1}{7} + 8 \text{ A tang.} \frac{2}{11},$$

cuius arcum priorem iam ante evolvimus. At vero ob

$$\frac{tt}{1+tt} = \frac{4}{125} = \frac{32}{1000}$$

pro altero habebimus

$$\text{A tang.} \frac{2}{11} = \frac{22}{125}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{32}{1000}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{32}{1000}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{32}{1000}\right)^3 + \text{etc}\right.$$

Verum hic continua multiplicatio per numerum 32 non satis ad calc idonea, praecipue autem haec series minus convergit quam quae e deducta.

19. Hanc ob caussam penitus reiiciamus istum arcum, eiusque reductionis supra datae substituamus duos novos arcus, quorum alte statuendo $\frac{\alpha}{a} = \frac{2}{11}$ et $\frac{\beta}{b} = \frac{1}{7}$, hincque fiet

$$\frac{\alpha b - \beta a}{\alpha\beta + ab} = \frac{3}{79},$$

unde

$$\pi = 20\,\mathrm{A\,tang.}\frac{1}{7} + 8\,\mathrm{A\,tang.}\frac{3}{79}.$$

Ubi notetur, posito $t = \frac{3}{79}$ fore

$$\frac{tt}{1+tt} = \frac{9}{6250} = \frac{144}{100000},$$

quae fractio propemodo est $\frac{1}{700}$; unde patet hanc seriem

$$\mathrm{A\,tang.}\frac{3}{79} = \frac{237}{6250}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2\right.$$

maxime convergere eiusque terminos propemodum septinge

20. Ista igitur series maxime est notatu digna propter gentiam, atque adeo plurimum operae pretium erit multi non deterreri, quippe quae, bis per 12 multiplicando, faci Per 12 autem multiplicare vix difficilius est quam per 2. ambos istos arcus per nostram novam seriem; atque impetr formam

$$\pi = \begin{cases} \frac{28}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{100}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{2}{100}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\right. \\ + \frac{30336}{100000}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{144}{100000}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{144}{100000}\right)^2 + \text{etc.}\right] \end{cases}$$

Hic igitur coëfficiens prioris seriei quinquies maior est q etiam singuli termini ibi exhibiti toties maiores sunt capie octo priorum terminorum erit

2, 8 3 7 9 4 1 0 9 2 0 8 3 2 7[1]) 6 5 | 7 0 6 2 9 3 | 7 0 6 2 9

octavus autem terminus

0,0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 4 0 6 4 | 2 1 1 3 4 4 | 2 1 1 3 4

ex quo iam sequentes termini facile colliguntur.

1) Editio princeps: 5. O. B.

mino sequens obtinentur, dum ille bis per 12 multiplicetur et a producto debita pars subtrahatur nullo respectu habito ad loca ciphrarum decimalium; quandoquidem ex hoc capite aberrari nequit, dum satis constat, quoties quilibet terminus minor est praecedente. Talem calculum pro sex prioribus terminis hic exhibeamus.

term. I. =	0,3 0 3 3 6
	3 6 4 0 3 2
3.	4 3 6 8 3 8 4
	1 4 5 6 1 2 8
term. II. =	2 9 1 2 2 5 6
	3 4 9 4 7 0 7 2
5.	4 1 9 3 6 4 8 6 4
	8 3 8 7 2 9 7 2 8
term. III.	3 3 5 4 9 1 8 9 1 2
	4 0 2 5 9 0 2 6 9 4 4
7.	4 8 3 1 0 8 3 2 3 3 2 8
	6 9 0 1 5 4 7 4 7 6 1,1 4 2 8 5 7,1 4 2 8 5 7,1 4 2 etc.
term. IV. =	4 1 4 0 9 2 8 4 8 5 6 6,8 5 7 1 4 2,8 5 7 1 4 2,8 5 7 etc.
	4 9 6 9 1 1 4 1 8 2 8 0 2,2 8 5 7 1 4,2 8 5 7 1 4,2 8 5 etc.
9.	5 9 6 2 9 3 7 0 1 9 3 6 2 7,4 2 8 5 7 1,4 2 8 5 7 1,4 2 8 etc.
	6 6 2 5 4 8 5 5 7 7 0 6 9,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4 etc.
term. V. =	5 3 0 0 3 8 8 4 6 1 6 5 5 7,7 1 4 2 8 5,7 1 4 2 8 5,7 1 4 etc.
	6 3 6 0 4 6 6 1 5 3 9 8 6 9 2,5 7 1 4 2 8,5 7 1 4 2 8,5 7 1 etc.
11.	7 6 3 2 5 5 9 3 8 4 7 8 4 3 1 0,8 5 7 1 4 2,8 5 7 1 4 2,8 5 7 etc.
	6 9 3 8 6 9 0 3 4 9 8 0 3 9 1,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 etc.
term. VI. =	6 9 3 8 6 9 0 3 4 9 8 0 3 9 1,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 0 3,8 9 6 1 etc.

unde ipsos terminos desumamus et in unam summam colligamus:

term.	I. =	0,30336
—	II. =	2912256
—	III. =	3354918912
—	IV. =	414092848566,857142,857142
—	V. =	53003884616557,714285,7
—	VI. =	693869034980391,896
Summa	=	0,303651561506514781282057700391,89610
		96103,896103,8 etc.,

ubi imprimis notatu dignum occurrit, quod summa quinque priorum norum absolute exhiberi potest, dum scilicet fractio decimalis in figu abrumpitur, haecque postrema formula pro π data ad calculum maximo accommodata.

22. Ex eodem principio, unde nostram seriem deduximus, aliae series derivari possunt pariter maxime convergentes. Inchoando sci serie vulgari

$$A\,\mathrm{tang.}\,t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \text{etc.}$$

ponamus huius seriei iam n terminos actu esse collectos, quorum sum

$$\Sigma = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \cdots \pm \frac{t^{2n-1}}{2n-1}.$$

Summam autem sequentium terminorum statuamus

$$s = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+3}}{2n+3} + \frac{t^{2n+5}}{2n+5} - \text{etc.},$$

a ut sit

$$\text{A tang. } t = \Sigma \pm s,$$

bi ergo numerus Σ tanquam iam inventus spectatur, alter vero s investi-
ari debeat.

23. Ratiocinium igitur eodem modo instituamus, ut supra § 4, quas
porationes hic apponamus.

$$s = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} - \frac{t^{2n+3}}{2n+3} + \frac{t^{2n+5}}{2n+5} - \text{etc.},$$

$$stt = \qquad + \frac{t^{2n+3}}{2n+1} - \frac{t^{2n+5}}{2n+3} + \text{etc.},$$

$$s(1+tt) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2t^{2n+5}}{(2n+3)(2n+5)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + s'tt,$$

rgo

$$s' = \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2t^{2n+3}}{(2n+3)(2n+5)} + \text{etc.},$$

$$s'tt = \qquad + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)} - \text{etc.},$$

$$s'(1+tt) = \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{2\cdot 4t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} - \text{etc.}$$

$$= \frac{2t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + s''tt$$

etc.

24. Quodsi iam valores introducti restituantur, facile patet tandem ad
anc seriem perventum iri

$$s = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(1+tt)} + \frac{2t^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(1+tt)^2}$$

$$+ \frac{2\cdot 4t^{2n+5}}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(1+tt)^3} + \text{etc.},$$

quae expressio contrahitur in sequentem

$$s = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(1+tt)}\left(1 + \frac{2tt}{(2n+3)(1+tt)} + \frac{2 \cdot 4t^4}{(2n+3)(2n+5)(1+tt)}\right.$$

haecque series utique aliquanto magis convergit quam praecedon
quod denominatores multo maiores sunt quam numeratores; veru
mulae ante exhibitae his seriebus longissimo anteferendae vident
ad usum practicum respiciamus.

DE NOVO GENERE SERIERUM RATIONALIUM ET VALDE CONVERGENTIUM QUIBUS RATIO PERIPHERIAE AD DIAMETRUM EXPRIMI POTEST[1]

Conventui exhibita die 17. Iunii 1779

Commentatio 706 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 11 (1793), 1798, p. 150—154

Summarium ibidem p. 169

SUMMARIUM

Ce nouveau genre de séries est aussi déduit de la décomposition

$$\pi = 8\ \text{A tang.}\ \frac{1}{3} + 4\ \text{A tang.}\ \frac{1}{7};$$

le principe du développement de ces arcs en séries est très différent de celui du oire précédent. Le voici: Comme

$$\text{A tang.}\ \frac{x}{2-x} = \int \frac{\partial x}{2-2x+xx} = 2\int \frac{\partial x}{4+x^4} + 2\int \frac{x\partial x}{4+x^4} + \int \frac{xx\partial x}{4+x^4},$$

ura par les procédés connus

$$\text{A tang.}\ \frac{x}{2-x} = \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{2}\left[1 - \frac{1}{5}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{13}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ +&\frac{xx}{4}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right] \\ +&\frac{x^3}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{1}{11}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{15}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right] \end{aligned}\right\}.$$

1) Confer hac cum dissertatione praecedentem et alias in nota 1 ad p. 1 adiecta laudatas. C. B.

En mettant donc premièrement $x=\frac{1}{2}$ et ensuite $x=\frac{1}{4}$, on aura trois séries et autant pour A tang. $\frac{1}{7}$, et la circonférence π sera exprimée par six séries cèdent selon des puissances de 2, c'est-à-dire les trois premières selon les p et les trois dernières selon les puissances de $\frac{1}{1024}$, par conséquent toutes ex vergentes et, de plus, très commodes pour le calcul.

1. Principium, unde hae series sunt deductae, situm est in binomiali: $4+x^4$, quam constat involvere hos duos factores rati

$$2+2x+xx \quad \text{et} \quad 2-2x+xx.$$

Hinc enim statim sequitur hanc formulam integralem

$$\int \frac{\partial x(2+2x+xx)}{4+x^4},$$

quam signo $\odot$ indicemus, reduci ad hanc

$$\odot = \int \frac{\partial x}{2-2x+xx},$$

cuius integrale ita sumtum, ut evanescat posito $x=0$, est A tan observetur

$$\text{casu } x=1 \quad \text{esse} \quad \odot = \frac{\pi}{4};$$

at vero

$$\text{casu } x=\frac{1}{2} \quad \text{erit} \quad \odot = \text{A tang.}\,\frac{1}{3},$$

tum vero

$$\text{casu } x=\frac{1}{4} \quad \text{erit} \quad \odot = \text{A tang.}\,\frac{1}{7}.$$

Notum autem est esse[1])

$$2\,\text{A tang.}\,\frac{1}{3}+\text{A tang.}\,\frac{1}{7}=\text{A tang.}\,1=\frac{\pi}{4}.$$

---

1) Confer praecedentis Commentationis § 3, huius voluminis p. 5. G. B.

2. Cum igitur formula integralis illa signo ☉ indicata tribus constet partibus, singulas seorsim evolvamus, quas brevitatis gratia sequentibus characteribus insigniamus

$$\text{I. } \int \frac{\partial x}{4+x^4} = ♄, \quad \text{II. } \int \frac{x\partial x}{4+x^4} = ♃, \quad \text{III. } \int \frac{xx\partial x}{4+x^4} = ♂,$$

ita ut sit

$$☉ = 2♄ + 2♃ + ♂ = \text{A tang. } \frac{x}{2-x}.$$

Nunc igitur istas tres formulas integrales more solito in series infinitas evolvamus inde formandas, quod sit

$$\frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{4^2} - \frac{x^{12}}{4^3} + \frac{x^{16}}{4^4} - \text{etc.}\right).$$

3. Quodsi iam primo istam seriem ducamus in ∂x et integremus, prima formula, ♄, per sequentem seriem exprimetur

$$♄ = \frac{x}{4}\left[1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{13}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

At vero illa series ducta in $x\partial x$ et integrata dabit

$$♃ = \frac{xx}{8}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{5}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

Denique eadem series ducta in $xx\partial x$ et integrata praebet

$$♂ = \frac{x^3}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{11}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 - \frac{1}{15}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

4. Cum igitur sit

$$☉ = 2♄ + 2♃ + ♂,$$

evolvamus seorsim casus initio memoratos, quibus est vel x
vel $x=\frac{1}{4}$, quorum primo est $\frac{x^4}{4}=\frac{1}{4}$, secundo vero est $\frac{x^4}{4}$
$\frac{x^4}{4}=\frac{1}{1024}$; unde patet binos casus posteriores maxime conver
ipsa prima, cuius termini in ratione quadrupla decrescunt, iam
quam series LEIBNITIANA sumto arcu, cuius tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, p
hic calculus nulla irrationalitate perturbatur.

EVOLUTIO CASUS PRIMI, QUO $x=1$ ET $\odot=$ A ta

5. Cum igitur hic sit $\frac{x^4}{4}=\frac{1}{4}$, tres nostrae series prin
sequenti modo procedent.

$$♄=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{13}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{17}\left(\frac{1}{4}\right)^4-\right.$$

$$♃=\frac{1}{8}\left[1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^4-\right.$$

$$♂=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{11}\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{19}\left(\frac{1}{4}\right)^4-\right.$$

6. Cum igitur sit

$$\odot=2♄+2♃+♂=\frac{\pi}{4},$$

per 4 multiplicando valor ipsius π per sequentes tres series

$$\pi=\begin{cases}\;\;\;\;2\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4^2}-\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4^3}+\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{4^4}-\right.\\+1\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4^4}-\right.\\+1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{4^2}-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{4^3}+\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{4^4}-\right.\end{cases}$$

7. Ex his certe ternis seriebus ratio peripheriae ad d
minore labore computari potuisset, quam ex serie LEIBNITIA

adeo usque ad 128 determinavit. At vero sequentes casus multo magis laborem sublevare possent.

EVOLUTIO CASUS SECUNDI, QUO $x = \frac{1}{2}$

8. Hoc igitur casu erit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{64}$, unde tres illae series sequenti modo ...entur

$$♄ = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right),$$

$$♃ = \frac{1}{32}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right),$$

$$♂ = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right).$$

9. Cum igitur

$$2♄ + 2♃ + ♂ = \text{A tang.}\frac{1}{3},$$

$$\text{A tang.}\frac{1}{3} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \end{array}\right\}.$$

... autem hic tres computandae sunt series, tamen, quia singulae secundum ...em rationem 1 : 64 decrescunt, laborem mirum in modum contrahere licebit.

1) Vide notas 2), 3), 4) p. 3 huius voluminis adiectas. C. B.

EVOLUTIO CASUS TERTII, QUO $x = \frac{1}{4}$

10. Cum igitur hic sit $\frac{x^4}{4} = \frac{1}{1024}$, series nostrae tres principales habebunt

$$♄ = \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right),$$

$$♃ = \frac{1}{128}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right),$$

$$♂ = \frac{1}{256}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right).$$

11. Cum igitur

$$2♄ + 2♃ + ♂ = \text{A tang.}\,\frac{1}{7},$$

erit his seriebus debite iunctis

$$\text{A tang.}\,\frac{1}{7} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{64}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{256}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \end{array}\right\}$$

APPLICATIO BINORUM CASUUM POSTERIORUM AD PERIPHERIAM CIRCULI PER SERIES MAXIME CONVERGEN[TES] EXPRIMENDAM

12. Cum sit, uti iam observavimus,

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{A tang.}\,\frac{1}{3} + \text{A tang.}\,\frac{1}{7},$$

erit

$$\pi = 8\,\text{A tang.}\,\frac{1}{3} + 4\,\text{A tang.}\,\frac{1}{7};$$

seriebus supra inventis substitutis valor ipsius π per sex sequentes series coniunctim exprimetur:

$$\pi = \begin{cases} \quad 2\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{64} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{64^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{64^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{64}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{1024^2} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1024^3} + \text{etc.}\right). \end{cases}$$

Hic ergo maximo notatu dignum occurrit, quod omnes istae series per solas potestates binarii procedant.

DE EVOLUTIONE POTESTATIS POLYNOMIALIS CUIUSCUNQ

$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.})^n$

Conventui exhibita die 6. Julii 1778

Commentatio 709 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, p. 47–

Summarium ibidem p. 63–64

SUMMARIUM

Tous les Géomètres connoissent la signification des caractères $\left(\frac{n}{0}\right)$, $\left(\frac{n}{1}\right)$, (dont feu Mr. EULER s'est servi pour indiquer les coëfficiens de la n^{me} puissance et les grands avantages qu'il a retiré de ce symbolisme pour découvrir plusien remarquables de ces coëfficiens. Dans le présent Mémoire, son dessein a été d les coëfficiens de la n^{me} puissance du trinome, qu'il désigne par les caractères $\left(\frac{n}{2}\right)^3$ etc., au moyen de ceux du binome, $\left(\frac{n}{0}\right)^2$, $\left(\frac{n}{1}\right)^2$, $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ etc., de même que l du quadrinome par ceux du trinome, et ainsi de suite.

Pour effectuer ceci, il développe le trinome $(1 + x(1 + x))^n$; et comme le t de cette puissance développée est $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1 + x)^\alpha$, en développant $(1 + x)^\alpha$, le t sera $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 x^\beta$. Ainsi le coëfficient du terme $x^{\alpha+\beta}$ sera $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \left(\frac{n}{\alpha}\right)^2$; de sorte que,

1) Confer hac cum Commentatione praeter Commentationes 326 et 551 praec Commentationem 722 huiusce voluminis. C. B.

coëfficient $\binom{n}{\lambda}^3$ de la puissance x^λ dans le trinome $(1+x+xx)^n$ développé, on n'a qu'à donner à α et β toutes les valeurs en nombres entiers qui rendent $\alpha+\beta=\lambda$, et on aura

$$\binom{n}{\lambda}^3 = \binom{\lambda}{0}^2\binom{n}{\lambda}^2 + \binom{\lambda-1}{1}^2\binom{n}{\lambda-1}^2 + \binom{\lambda-2}{2}^2\binom{n}{\lambda-2}^2 + \text{etc.}$$

D'une manière semblable l'auteur procède pour trouver le coëfficient $\binom{n}{\lambda}^4$ de la puissance x^λ dans le quadrinome développé $(1+x+x^2+x^3)^n$ et le coëfficient $\binom{n}{\lambda}^5$ du même terme x^λ dans le quinome $(1+x+x^2+x^3+x^4)^n$, ce qui le conduit enfin à l'expression générale du coëfficient $\binom{n}{\lambda}^{\theta+1}$ du terme x^n dans le polynome développé

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^\theta)^n,$$

qui est

$$\binom{n}{\lambda}^{\theta+1} = \binom{n}{\lambda}^2\binom{\lambda}{0}^\theta + \binom{n}{\lambda-1}^2\binom{\lambda-1}{1}^\theta + \binom{n}{\lambda-2}^2\binom{\lambda-2}{2}^\theta + \text{etc.}$$

1. Incipiamus a potestate binomiali $(1+x)^n$, qua more solito evoluta designemus coëfficientem potestatis cuiusvis x^λ hoc charactere $\binom{n}{\lambda}$, ita ut sit

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}xx + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

ubi ergo erit

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \quad \text{etc.},$$

et in genere

$$\binom{n}{\lambda} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\lambda},$$

unde patet casu $\lambda=0$ et $\lambda=n$ fore

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

atque adeo in genere

$$\binom{n}{\lambda} = \binom{n}{n-\lambda}.$$

Praeterea vero notasse iuvabit tam casibus, quibus λ est num
quam quibus est numerus maior quam n, significatum formu
esse nihilo aequalem.

2. Quoniam per hos characteres calculus non mediocrite
contrahitur, similibus characteribus utamur etiam in evoluti
trinomialium, quadrinomialium et generatim polynomialium
Hunc in finem superioribus characteribus pro binomio adhib
quasi exponentem 2, quandoquidem hinc nulla ambiguitas est
niam in huiusmodi calculis nullae potestates horum charact
solent; hoc modo pro evolutione potestatis binomialis habebi

$$(1+x)^n = \left(\frac{n}{0}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x + \left(\frac{n}{2}\right)^2 xx + \left(\frac{n}{3}\right)^2 x^3 + \text{etc}$$

ubi ergo meminisse oportet esse in genere

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{n}{n-\lambda}\right)^2,$$

tum vero perpetuo

$$\left(\frac{n}{0}\right)^2 = \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1$$

atque has formulas in nihilum abire casibus, quibus est λ v
teger negativus vel positivus maior quam n.

3. Iisdem igitur characteribus utemur pro evolutione p
nomialium quarumcunque, dummodo pro trinomialibus adiung
ponentem ternarium, pro quadrinomialibus quaternarium, pro
quinarium et ita porro, hoc scilicet modo:

Pro trinomialibus $(1+x+xx)^n$ evolutio praebeat

$$\left(\frac{n}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^3 x + \left(\frac{n}{2}\right)^3 x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^3 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^3 x^4 + \text{etc.}$$

Pro quadrinomialibus $(1+x+xx+x^3)^n$ evolutio praebeat

$$\left(\frac{n}{0}\right)^4 + \left(\frac{n}{1}\right)^4 x + \left(\frac{n}{2}\right)^4 x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^4 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^4 x^4 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{0}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)xx + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)x^4 + \left(\frac{n}{5}\right)x^5 + \text{etc.}$$

etc.

4. His explicatis inquiramus in veros valores horum characterum exponentibus 3, 4, 5, 6 etc. insignitorum et videamus, quomodo illi per characteres binario notatos, quippe quorum significatus est notissimus, determinari possint. Singulos igitur casus harum potestatum polynomialium ordine percurramus.

EVOLUTIO POTESTATIS TRINOMIALIS

$$(1 + x + xx)^n$$

5. Seriem hinc oriundam hoc modo repraesentemus

$$\left(\frac{n}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^3 x + \left(\frac{n}{2}\right)^3 xx + \left(\frac{n}{3}\right)^3 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^3 x^4 + \text{etc.},$$

cuius terminus ultimus erit $= \left(\frac{n}{2n}\right)^3 x^{2n}$, ubi coëfficientem $\left(\frac{n}{2n}\right)^3$ iam novimus unitati aequalem, perinde ac terminum primum $\left(\frac{n}{0}\right)^3$; tum vero, quia coefficientes isti retro eodem ordine progrediuntur, hinc sequitur fore

$$\left(\frac{n}{1}\right)^3 = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^3, \quad \left(\frac{n}{2}\right)^3 = \left(\frac{n}{2n-2}\right)^3 \quad \text{atque adeo in genere} \quad \left(\frac{n}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{n}{2n-\lambda}\right)^3.$$

Tum hic evidens est valorem formulae $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3$ in nihilum abire tam casibus, quibus λ est numerus integer negativus, quam casibus, quibus est positivus maior quam $2n$.

6. Ante autem quam determinationem horum characterum suscipiamus, haud incongruum erit evolutionem casuum simpliciorum ante oculos posuisse:

n	$(1 + x + xx)^n$
0	1
1	$1 + x + xx$
2	$1 + 2x + 3xx + 2x^3 + x^4$
3	$1 + 3x + 6xx + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$
4	$1 + 4x + 10xx + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8$
5	$1 + 5x + 15xx + 30x^3 + 45x^4 + 51x^5 + 45x^6 + 30x^7 + 15x^8 + 5x^9 + x$
6	$1 + 6x + 21xx + 50x^3 + 90x^4 + 126x^5 + 141x^6 + 126x^7 + 90x^8 + 50x^9 +$
	etc.

Ex ultimo casu, quo $n = 6$, patet igitur esse

$$\left(\frac{6}{0}\right)^3 = 1, \quad \left(\frac{6}{1}\right)^3 = 6, \quad \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 21, \quad \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 50, \quad \left(\frac{6}{4}\right)^3 = 90, \quad \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 12$$

$$\left(\frac{6}{6}\right)^3 = 141,$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = 126, \quad \left(\frac{6}{8}\right)^3 = 90, \quad \left(\frac{6}{9}\right)^3 = 50, \quad \left(\frac{6}{10}\right)^3 = 21, \quad \left(\frac{6}{11}\right)^3 = 6, \quad \left(\frac{6}{12}\right)^3 = 1.$$

7. Ut nunc investigemus, quomodo hi characteres ex trinomio orti similes characteres ex binomio ortos exprimi queant, potestatem proposit sub forma binomiali repraesentemus hoc modo

$$[1 + x(1 + x)]^n,$$

cuius evolutio ergo praebebit hanc progressionem

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 x(1 + x) + \left(\frac{n}{2}\right)^2 xx(1 + x)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2 x^3(1 + x)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2 x^4(1 + x)^4 + \text{etc.}$$

cuius terminus generalis hanc habebit formam

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1 + x)^\alpha.$$

potestas x^λ, quatenus quidem in iis continetur. Forma autem generalis est $\binom{n}{\alpha}^2 x^\alpha (1+x)^\alpha$; unde ob

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}^2 x + \binom{\alpha}{2}^2 x^2 + \binom{\alpha}{3}^2 x^3 + \binom{\alpha}{4}^2 x^4 + \text{etc.},$$

quia hic occurrit generatim terminus $\binom{\alpha}{\beta}^2 x^\beta$, is ductus in $\binom{n}{\alpha}^2 x^\alpha$ praebet $\binom{\alpha}{\beta}^2 \binom{n}{\alpha}^2 x^{\alpha+\beta}$. Quodsi ergo fuerit $\alpha + \beta = \lambda$, coëfficiens $\binom{\alpha}{\beta}^2 \binom{n}{\alpha}^2$ pars erit coëfficientis quaesiti $\binom{n}{\lambda}^3$.

9. Quamobrem ad valorem coëfficientis $\binom{n}{\lambda}^3$ eruendum tantum opus est litteris α et β omnes valores in integris tribuere, quibus prodire potest $\alpha + \beta = \lambda$. Evidens autem est ambos hos numeros α et β neque negative neque maiores quam n capi debere, quia alioquin ista forma evanesceret; tum vero, etiam si esset $\beta > \alpha$, formula $\binom{\alpha}{\beta}^2$ pariter esset nulla. Hinc igitur maximus valor pro α assumendus erit $= \lambda$, tum vero $\beta = 0$; unde sequitur

$$\begin{array}{llllll} \text{si} & \alpha = \lambda, & \lambda - 1, & \lambda - 2, & \lambda - 3, & \lambda - 4 \quad \text{etc.,} \\ \text{fore} & \beta = 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \quad \text{etc.} \end{array}$$

10. Producta igitur ex singulis his casibus orta et in unam summam collecta dabunt valorem quaesitum characteris $\binom{n}{\lambda}^3$, ita ut nacti simus hanc determinationem

$$\binom{n}{\lambda}^3 = \binom{\lambda}{0}^2 \binom{n}{\lambda}^2 + \binom{\lambda-1}{1}^2 \binom{n}{\lambda-1}^2 + \binom{\lambda-2}{2}^2 \binom{n}{\lambda-2}^2 + \binom{\lambda-3}{3}^2 \binom{n}{\lambda-3}^2 + \text{etc.},$$

sicque iste valor per partes cognitas exprimitur, quarum numerus quovis casu est finitus.

ipsi λ valores 0, 1, 2, 3, 4 etc., eritque ut sequitur:

$$\left(\frac{n}{0}\right)^3 = 1,$$

$$\left(\frac{n}{1}\right)^3 = \left(\frac{1}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{1}\right)^2 = n,$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{1}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + n =$$

$$\left(\frac{n}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{3}\right)^3 = \left(\frac{n}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \left(\frac{4}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{3}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{5}\right)^3 = \left(\frac{n}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{6}\right)^3 = \left(\frac{6}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^2 \left(\frac{n}{3}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{6}\right)^3 = \left(\frac{n}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{n}{5}\right)^2 + 6\left(\frac{n}{4}\right)^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{7}\right)^3 = \left(\frac{7}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{n}{4}\right)^2$$

sive

$$\left(\frac{n}{7}\right)^3 = \left(\frac{n}{7}\right)^2 + 6\left(\frac{n}{6}\right)^2 + 10\left(\frac{n}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{4}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{8}\right)^3 = \left(\frac{8}{0}\right)^2 \left(\frac{n}{8}\right)^2 + \left(\frac{7}{1}\right)^2 \left(\frac{n}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \left(\frac{n}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \left(\frac{n}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{4}\right)^2 ($$

$$\left(\frac{n}{9}\right)^3=\left(\frac{9}{0}\right)^2\left(\frac{n}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{1}\right)^2\left(\frac{n}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2\left(\frac{n}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{3}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2$$

o

$$\left(\frac{n}{9}\right)^3=\left(\frac{n}{9}\right)^2+8\left(\frac{n}{8}\right)^2+21\left(\frac{n}{7}\right)^2+20\left(\frac{n}{6}\right)^2+5\left(\frac{n}{5}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{10}\right)^3=\left(\frac{10}{0}\right)^2\left(\frac{n}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{1}\right)^2\left(\frac{n}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2\left(\frac{n}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2\left(\frac{n}{7}\right)^2+\left(\frac{6}{4}\right)^2\left(\frac{n}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{5}\right)^2\left(\frac{n}{5}\right)^2$$

e

$$\left(\frac{n}{10}\right)^3=\left(\frac{n}{10}\right)^2+9\left(\frac{n}{9}\right)^2+28\left(\frac{n}{8}\right)^2+35\left(\frac{n}{7}\right)^2+15\left(\frac{n}{6}\right)^2+\left(\frac{n}{5}\right)^2$$

etc.

12. Applicemus haec exempli loco ad casum $n=6$, quippe quem supra 5 iam evolvimus; ac reperiemus:

$$\left(\frac{6}{0}\right)^3=1,$$

$$\left(\frac{6}{1}\right)^3=6,$$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^3=21,$$

$$\left(\frac{6}{3}\right)^3=\left(\frac{6}{3}\right)^2+2\left(\frac{6}{2}\right)^2=50,$$

$$\left(\frac{6}{4}\right)^3=\left(\frac{6}{4}\right)^2+3\left(\frac{6}{3}\right)^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2=15+3\cdot 20+15=90,$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3=\left(\frac{6}{5}\right)^2+4\left(\frac{6}{4}\right)^2+3\left(\frac{6}{3}\right)^2=6+4\cdot 15+3\cdot 20=126,$$

$$\left(\frac{6}{6}\right)^3=\left(\frac{6}{6}\right)^2+5\left(\frac{6}{5}\right)^2+6\left(\frac{6}{4}\right)^2+\left(\frac{6}{3}\right)^2=1+5\cdot 6+6\cdot 15+20=141,$$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3=\left(\frac{6}{7}\right)^2+6\left(\frac{6}{6}\right)^2+10\left(\frac{6}{5}\right)^2+4\left(\frac{6}{4}\right)^2=6+10\cdot 6+4\cdot 15=126,$$

erit atque

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 = 126;$$

simili modo erit

$$\left(\frac{6}{8}\right)^3 = \left(\frac{6}{4}\right)^3 = 90, \quad \left(\frac{6}{9}\right)^3 = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 50, \quad \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 21, \quad \left(\frac{6}{11}\right.$$

ac denique

$$\left(\frac{6}{12}\right)^3 = \left(\frac{6}{0}\right)^3 = 1,$$

qui valores cum supra datis egregie conveniunt.

EVOLUTIO POTESTATIS QUADRINOMIALIS

$$(1 + x + xx + x^3)^n$$

13. Valorem igitur hunc evolutum ita repraesentabimus

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^4 x + \left(\frac{n}{2}\right)^4 xx + \left(\frac{n}{3}\right)^4 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^4 x^4 + \left(\frac{n}{5}\right)^4 x^5 + \text{et}$$

ubi scilicet est $\left(\frac{n}{0}\right)^4 = 1$. Deinde, quia ultimus terminus est x^{3n},
et quia coëfficientes retro scripti eundem ordinem servant, erit (
atque in genere

$$\left(\frac{n}{3n-\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^4;$$

ubi observetur tam casibus, quibus λ est numerus integer ne
positivus maior quam $3n$, valores huius formulae in nihilum
notatis hic mihi est propositum indagare, quomodo hi characte
notati per characteres sive binario sive ternario notatos, utpot
definiri queant.

14. Antequam hunc laborem suscipiamus, casus simplici
propositae in tabula subiuncta ob oculos ponamus.

$+ x + xx + x^3$

$+ 2x + 3xx + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6$

$+ 3x + 6xx + 10x^3 + 12x^4 + 12x^5 + 10x^6 + 6x^7 + 3x^8 + x^9$

$+ 4x + 10xx + 20x^3 + 31x^4 + 40x^5 + 44x^6 + 40x^7 + 31x^8 + 20x^9 + \text{etc.}$

$+ 5x + 15xx + 35x^3 + 65x^4 + 101x^5 + 135x^6 + 155x^7 + 155x^8 + 135x^9 + \text{etc.}$

$+ 6x + 21xx + 56x^3 + 120x^4 + 216x^5 + 336x^6 + 456x^7 + 546x^8 + 580x^9 + \text{etc.}$

etc.

5. Nunc formulam propositam sub hac binomiali

$$\{1 + x(1 + x + xx)\}^n$$

mus, eiusque evolutio nobis praebet hanc seriem

$$1 + \binom{n}{1}^2 x(1 + x + xx) + \binom{n}{2}^2 x^2(1 + x + xx)^2 + \text{etc.},$$

terminus generalis est

$$\binom{n}{\alpha}^2 x^\alpha (1 + x + xx)^\alpha.$$

vero, quia $(1 + x + xx)^\alpha$ est potestas trinomialis, erit

$$(1 + x + xx)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}^3 x + \binom{\alpha}{2}^3 xx + \binom{\alpha}{3}^3 x^3 + \text{etc.},$$

terminus terminus generalis est $\binom{\alpha}{\beta}^3 x^\beta$; unde si proponatur potestas x^λ nte $\lambda = \alpha + \beta$, hoc membro orietur pro hac potestate $\binom{\alpha}{\beta}^3 \binom{n}{\alpha}^2 x^\lambda$.

unam summam coniungatur, quo facto erit

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2\left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-3}\right)^2\left(\frac{\lambda-}{3}\right.$$

Sicque patet, quomodo omnes charactores quaternario notati per iam sive binario sive ternario notatos determinentur; quod quo clarius loco λ successive scribamus numeros 0, 1, 2, 3, 4 etc. ac reperiemu

$$\left(\frac{n}{0}\right)^4 = \left(\frac{n}{0}\right)^2\left(\frac{0}{0}\right)^3 = 1,$$

$$\left(\frac{n}{1}\right)^4 = \left(\frac{n}{1}\right)^2\left(\frac{1}{0}\right)^3 = n,$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^4 = \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^2\left(\frac{1}{1}\right)^3 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n,$$

$$\left(\frac{n}{3}\right)^4 = \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

sive

$$\left(\frac{n}{3}\right)^4 = \left(\frac{n}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{1}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^4 = \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{1}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

sive

$$\left(\frac{n}{4}\right)^4 = \left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{5}\right)^4 = \left(\frac{n}{5}\right)^2\left(\frac{5}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

$$\left(\frac{n}{6}\right)^4 = \left(\frac{n}{6}\right)^2\left(\frac{6}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^2\left(\frac{5}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{2}{4}\right)^3 + \text{etc.},$$

$$\left(\frac{n}{7}\right)^4 = \left(\frac{n}{7}\right)^2\left(\frac{7}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{6}\right)^2\left(\frac{6}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^2\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \text{etc.},$$

$$\left(\frac{n}{8}\right)^4 = \left(\frac{n}{8}\right)^2\left(\frac{8}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{7}\right)^2\left(\frac{7}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{6}\right)^2\left(\frac{6}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{5}\right)^2\left(\frac{5}{3}\right)^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^2\left(\frac{4}{4}\right)^3 + \left(\frac{n}{3}\right)^2$$

etc.

$$(1 + x + xx + x^3 + x^4)^n$$

17. Eius ergo valorem evolutum ita exhibemus

$$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^5 x + \left(\frac{n}{2}\right)^5 x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)^5 x^3 + \left(\frac{n}{4}\right)^5 x^4 + \left(\frac{n}{5}\right)^5 x^5 + \text{etc.},$$

st

$$\left(\frac{n}{0}\right)^5 = \left(\frac{n}{4n}\right)^5 = 1$$

in genere

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^5 = \left(\frac{n}{4n-\lambda}\right)^5;$$

vero patet hos valores evanescere tam casibus, quibus est λ numerus r negativus, quam quibus est positivus maior quam $4n$.

8. Nunc eadem forma tanquam binomium repraesentata erit

$$[1 + x(1 + x + xx + x^3)]^n,$$

evolutio in genere praebet membrum $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 x^\alpha (1 + x + xx + x^3)^\alpha$, ubi factor $+ xx + x^3)^\alpha$ continet terminum $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 x^\beta$, ita ut iunctim habeatur iste ter- $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 x^{\alpha+\beta}$. Quare si fuerit $\alpha + \beta = \lambda$, potestatis x^λ ex hoc membro iens erit $\left(\frac{n}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4$. Iam litteris α et β tribuantur omnes valores, quos re possunt incipiendo ab $\alpha = \lambda$; atque *coëfficiens* quaesitus erit

$$= \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{0}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2 \left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda-3}\right)^2 \left(\frac{\lambda-3}{3}\right)^4 + \text{etc.}$$

omnes characteres numero 5 notati per characteres ordinis praecedentis o 4 notatos una cum characteribus numero 2 notatis definientur.

) Editio princeps: *quinquenomialis.* C. B.

19. Ex his iam satis liquet, si proponatur potestas polynomi
ex terminis numero $\theta + 1$ constantibus, scilicet

$$(1 + x + xx + x^3 + \cdots + x^\theta)^n,$$

tum termini potestatem x^λ continentis coëfficientem fore $\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\theta+1}$
characteribus numero θ notatis componetur, ut sit

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\theta+1} = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^\theta + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2\left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^\theta + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^\theta + \cdots$$

quae forma omnes praecedentes in se complectitur. Si enim
valore $\theta = 1$, hoc casu habetur potestas binomialis $(1 + x)^n$, chara
unitate notati oriuntur ex potestate monomiali 1^n, unde oritur $\left(\frac{n}{0}\right)$
vero omnes in nihilum abeunt. Hinc per casus procedendo ha
sequitur:

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right) = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2,$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^3 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^2 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2\left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^2 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^2 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^4 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2\left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^3 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^3 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^5 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2\left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^4 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^4 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^6 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^5 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2\left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^5 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^5 + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right)^7 = \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{0}\right)^6 + \left(\frac{n}{\lambda-1}\right)^2\left(\frac{\lambda-1}{1}\right)^6 + \left(\frac{n}{\lambda-2}\right)^2\left(\frac{\lambda-2}{2}\right)^6 + \text{etc.}$$

etc.

SPECIMEN TRANSFORMATIONIS SINGULARIS SERIERUM

Conventui exhibita die 3. Septembris 1778

Commentatio 710 indicis ENESTROEMIANI
Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 12 (1794), 1801, p. 58—70
Summarium ibidem p. 64—65

SUMMARIUM

Les séries dont il est question dans ce Mémoire sont comprises sous la forme générale

$$s = 1 + \frac{ab}{1\cdot c}x + \frac{\Pi(a+1)(b+1)}{2(c+1)}x^2 + \frac{\Pi(a+2)(b+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.},$$

Π marque dans chaque terme le coëfficient du terme précédent; elle devient une ex-
sion finie toutes les fois que a ou b est un nombre entier négatif, et elle a cela de
rquable qu'en mettant

$$s = z(1-x)^{c-a-b}, \quad c-a=\alpha, \quad c-b=\beta,$$

a exprimé par une série parfaitement semblable à la proposée, savoir

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot c}x + \frac{\Pi(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)}x^2 + \frac{\Pi(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

L'analyse qui a conduit l'auteur à cette transformation singulière consiste à trans-
er la série proposée en une équation différentielle du second degré, opération qui
ctue facilement et qui donne

$$x(1-x)\frac{\partial\partial s}{s} + [c-(a+b+1)x]\frac{\partial s}{s} - ab = 0.$$

et

$$\frac{\partial\partial s}{s} = \frac{\partial\partial z}{z} - \frac{2n\partial x\partial z}{z(1-x)} + \frac{n(n-1)\partial x^2}{(1-x)^2}$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation différentielle du second degré, on ob

$$x(1-x)\frac{\partial\partial z}{z} + [c + (a+b-2c-1)x]\frac{\partial z}{z} - (c-a)(c-b) = 0$$

ou bien, à cause de $c-a=\alpha$, $c-b=\beta$,

$$x(1-x)\frac{\partial\partial z}{z} + [c-(\alpha+\beta+1)]\frac{\partial z}{z} - \alpha\beta = 0,$$

équation qui se déduit aussi de la précédente en changeant s, a et b en z, α et faisant donc le même changement dans la série proposée, il en résultera l'autre séri relation mutuelle entre les deux séries est la même qui subsiste entre les deux éq différentielles, savoir $c-a=\alpha$, $c-b=\beta$ et $s=(1-x)^n z$, où l'exposant $n=c$

L'auteur déduit aussi la seconde série d'une manière directe de la dernière é différentio-différentielle; et il termine son Mémoire par faire voir le grand avantage peut retirer de cette transformation pour la démonstration rigoureuse d'un théorè calcul intégral qu'il avoit trouvé autrefois par une simple conjecture et qui est ic plettement démontré, savoir que

$$\left(\frac{n+i}{i}\right)(1-aa)^{-n}\int\Delta^n\partial\varphi\cos i\varphi = \left(\frac{i-n-1}{i}\right)(1-aa)^{n+1}\int\Delta^{-n-1}\partial\varphi\cos i\varphi$$

où

$$\Delta = 1 + aa - 2a\cos\varphi.$$

(Voyez sur ce théorème le Mémoire[1]): *Demonstratio Theorematis insignis per conj cruti,* in *Instit. Calc. Integr.* Tomo IV. Supplem. p. 257.)

1. Contemplatus sum hanc seriem

$$s = 1 + \frac{ab}{1\cdot c}x + \Pi\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}x^2 + \Pi\frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.},$$

1) C'est le mémoire 674 de l'Index d'Eneström; *Leonhardi Euleri Opera omnia,* p. 197. C. B.

abrumpatur eiusque summa finito modo exprimatur.

2. Quodsi nunc statuamus

$$s = z(1-x)^{c-a-b}$$

porro faciamus

$$c - a = \alpha \quad \text{et} \quad c - b = \beta,$$

a z exprimet summam huius seriei praecedenti omnino similis

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot c} x + \Pi \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)} x^2 + \Pi \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.},$$

nunc abrumpitur omnibus casibus, quibus vel α vel β est numerus in- negativus, ideoque quoties fuerit vel $a-c$ vel $b-c$ numerus integer ivus.

3. Ista transformatio eo maioris momenti est censenda, quod non nisi ongas ambages atque adeo per aequationes differentiales secundi gradus posse videatur. Operae igitur pretium erit totam analysin, cui ista trans- atio innititur, dilucide exposuisse.

4. Cum sit

$$s = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} x + \frac{ab}{1 \cdot c} \cdot \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)} \cdot xx + \text{etc.}$$

e adeo in quovis termino sequente tam numerator quam denominator novos factores accipiat, per differentiationem primo ex quovis termino postremos factores tollamus, quod per has operationes praestabitur

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ab}{1 \cdot c} + \frac{ab}{1 \cdot c} \cdot \frac{(a+1)(b+1)}{c+1} x + \text{etc.},$$

quae ducta in x^c ac denuo differentiata praebet

$$\partial \cdot x^c \partial s = abx^{c-1} + \frac{ab}{1 \cdot c}(a+1)(b+1)x^c + \text{etc.},$$

ubi brevitati consulentes elementum ∂x omisimus, quippe quod spon
intelligi potest.

5. Iam simili modo per differentiationem singulis numeratoribu
noves factores adiungamus hoc modo:

1°. Series nostra ducta in x^a ac differentiata dabit

$$\partial \cdot x^a s = ax^{a-1} + \frac{ab}{1 \cdot c}(a+1)x^a + \text{etc.},$$

quae

2°. ducta in x^{b+1-a} iterumque differentiata praebet

$$\partial \cdot x^{b+1-a} \partial \cdot x^a s = abx^{b-1} + \frac{ab}{1 \cdot c}(a+1)(b+1)x^b + \text{etc.},$$

quae forma ex praecedente oritur, si ea multiplicetur per x^{b-c}.

6. Hinc igitur adipiscimur hanc aequationem

$$\partial \cdot x^{b-a+1} \partial \cdot x^a s = x^{b-c} \partial \cdot x^c \partial s,$$

quae aequatio evoluta reducitur ad hanc formam

$$x^{b+1} \partial\partial s + (a+b+1)x^b \partial s + abx^{b-1}s = x^b \partial\partial s + cx^{b-1} \partial s.$$

Haec aequatio divisa per x^{b-1} et omnibus terminis ad partem dextra
latis induet hanc formam

$$0 = x(1-x)\partial\partial s + [c-(a+b+1)x]\partial s - abs,$$

ita ut a resolutione huius aequationis differentialis secundi gradus su
seriei propositae pendeat. At vero haec aequatio ita comparata esse
ut in genere nullam integrationem admittat.

$$s = (1-x)^n z,$$

fit

$$ls = nl(1-x) + lz,$$

ifferentiando erit

$$\frac{\partial s}{s} = \frac{\partial z}{z} - \frac{n\partial x}{1-x}.$$

aequatio denuo differentiata praebet

$$\frac{\partial\partial s}{s} - \frac{\partial s^2}{ss} = \frac{\partial\partial z}{z} - \frac{\partial z^2}{zz} - \frac{n\partial x^2}{(1-x)^2}.$$

addatur haec aequatio

$$\frac{\partial s^2}{ss} = \frac{\partial z^2}{zz} - \frac{2n\partial x\partial z}{z(1-x)} + \frac{nn\partial x^2}{(1-x)^2}$$

rodibit

$$\frac{\partial\partial s}{s} = \frac{\partial\partial z}{z} - \frac{2n\partial x\partial z}{z(1-x)} + \frac{n(n-1)\partial x^2}{(1-x)^2}.$$

8. Quodsi iam aequatio proposita per s divisa ita repraesentetur

$$0 = x(1-x)\frac{\partial\partial s}{s} + [c-(a+b+1)x]\frac{\partial s}{s} - ab,$$

substitutione perveniemus ad aequationem differentialem secundi gradus z et x, quae erit[1]

$$x(1-x)\frac{\partial\partial z}{z} - \frac{2nx\partial x\partial z}{z} + [c-(a+b+1)x]\frac{\partial z}{z}$$
$$+ \frac{n(n-1)x\partial x^2}{1-x} - \frac{n[c-(a+b+1)x]\partial x}{1-x} - ab = 0.$$

9. Evidens hic est numerum n ita assumi posse, ut postrema membra minatorem $1-x$ habentia per eum dividi queant, id quod evenit casu

[1] In hac formula necnon in formulis paragraphi praecedentis elementa ∂x omittenda sunt. C. B.

$n = -a - b + c$, quo valore introducto, ut sit $s = (1-x)^{c-a-b}z$, inter z et x hanc accipiet formam:

$$x(1-x)\partial\partial z + [c + (a+b-2c-1)x]\partial z - (c-a)(c-b)z = 0.$$

10. Quodsi iam in hac aequatione ponamus $c - a = \alpha$ et $c -$ aequatio inter z et x sub hac forma apparebit:

$$x(1-x)\partial\partial z + [c - (\alpha+\beta+1)x]\partial z - \alpha\beta z = 0,$$

quae a priori prorsus non differt, nisi quod loco litterarum a et habeamus α et β. Quare cum prior aequatio differentio-differentialis ex serie

$$s = 1 + \frac{ab}{1\cdot c}x + \Pi\frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)}xx + \Pi\frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.},$$

vicissim ex aequatione posteriore nascetur series

$$z = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot c}x + \Pi\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(c+1)}xx + \Pi\frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{3(c+2)}x^3 + \text{etc.}$$

existente $\alpha = c - a$ et $\beta = c - b$; atque hae duae series s et z ita vicem pendent, ut sit $s = (1-x)^{c-a-b}z$ sive $\frac{s}{z} = (1-x)^{c-a-b}$.

11. Verum ex posteriore aequatione differentio-differentiali method eadem series pro z elici potest. Cum enim ex serie priori posito x $s = 1$, nunc autem posuerimus $z = (1-x)^{a+b-c}s$, eodem casu $x = 0$ fiet z Hoc notato pro z fingamus hanc seriem:

$$z = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.},$$

unde fit

$$\partial z = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \text{etc.}$$

et

$$\partial\partial z = 2B + 6Cx + 12Dx^2 + 20Ex^3 + 30Fx^4 + \text{etc.},$$

$$-2Bx^2 \qquad - 6Cx^3 - \text{etc.}$$

$$\gamma dz : dx = A\gamma + 2B\gamma x + 3C\gamma x^2 + 4D\gamma x^3 + \text{etc.}$$

$$-(\alpha+\beta+1)x\,dz : dx = -(\alpha+\beta+1)Ax - 2(\alpha+\beta+1)Bx^2 - 3(\alpha+\beta+1)Cx^3 - \text{etc.}$$

$$-\alpha\beta z = -\alpha\beta - A\alpha\beta x - B\alpha\beta x^2 - C\alpha\beta x^3 - \text{etc.}$$

$$x(1-x)\,ddz + \gamma dz - (\alpha+\beta+1)x\,dz - \alpha\beta z = 0.$$

Singulis igitur terminis ad nihilum reductis nanciscemur sequentes nes:

$$\text{I.} \quad A\gamma - \alpha\beta = 0,$$

$$\text{II.} \quad 2B(\gamma+1) - (\alpha+1)(\beta+1)A = 0,$$

$$\text{III.} \quad 3C(\gamma+2) - (\alpha+2)(\beta+2)B = 0,$$

$$\text{IV.} \quad 4D(\gamma+3) - (\alpha+3)(\beta+3)C = 0,$$

$$\text{V.} \quad 5E(\gamma+4) - (\alpha+4)(\beta+4)D = 0$$

etc.

Hinc igitur iidem eliciuntur coëfficientes, quos iam habuimus, scilicet

$$A = \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma},$$

$$B = \frac{A(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)},$$

$$C = \frac{B(\alpha+2)(\beta+2)}{3(\gamma+2)},$$

$$D = \frac{C(\alpha+3)(\beta+3)}{4(\gamma+3)}$$

etc.

autem methodus, qua hanc egregiam transformationem sumus adepti, sit obliqua et per ambages longas procedit, maxime optandum esset,

ut alia methodus magis directa et naturalis detegeretur, quo utique in lysin haud contemnendum incrementum inferretur. Fateor autem me hact in hac investigatione frustra laborasse.

14. Quoniam in his seriebus numerus factorum continuo crescit, qu characteres ex potestate binomiali desumtos commodius in usum v queamus, litteris a et b, perinde ac litteris α et β, valores tribuamus tivos ponendo

$$a = -f, \quad b = -g, \quad \alpha = -\zeta \quad \text{et} \quad \beta = -\eta,$$

ita ut sit

$$\zeta = -c - f \quad \text{et} \quad \eta = -c - g,$$

et iam ambae nostrae series s et z ita a se invicem pendebunt, ut sit

$$s = (1 - x)^{c+f+g} z.$$

Evolvamus nunc primo iuxta hos valores seriem priorem s, eritque

$$s = 1 + \frac{fg}{1 \cdot c} x + \Pi \frac{(f-1)(g-1)}{2(c+1)} x^2 + \Pi \frac{(f-2)(g-2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.}$$

similique modo posterior series erit

$$z = 1 + \frac{\zeta\eta}{1 \cdot c} x + \Pi \frac{(\zeta-1)(\eta-1)}{2(c+1)} x^2 + \Pi \frac{(\zeta-2)(\eta-2)}{3(c+2)} x^3 + \text{etc.}$$

15. Hic iam commode characteres memoratos adhibere poterimus. De igitur $\left(\frac{m}{n}\right)$ coëfficientem termini v^n, qui ipsi convenit ex evolutione potes binomialis $(1 + v)^m$, ita ut hoc modo habeamus

$$(1 + v)^m = 1 + \left(\frac{m}{1}\right) v + \left(\frac{m}{2}\right) v^2 + \left(\frac{m}{3}\right) v^3 + \text{etc.}$$

Hinc igitur pro priore nostrarum serierum fiet $\frac{f}{1} = \left(\frac{f}{1}\right)$; deinde $\frac{f(f-1)}{1 \cdot 2} =$ $\frac{f(f-1)(f-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \left(\frac{f}{3}\right)$ etc. sicque ista series iam concinnius ita referetur:

$$s = 1 + \frac{g}{c}\left(\frac{f}{1}\right) x + \frac{g}{c} \cdot \frac{g-1}{c+1}\left(\frac{f}{2}\right) x^2 + \frac{g}{c} \cdot \frac{g-1}{c+1} \cdot \frac{g-2}{c+2}\left(\frac{f}{3}\right) x^3 + \text{etc.}$$

$$\binom{g+c-1}{c-1}\frac{g}{c}=\binom{g+c-1}{c}; \qquad \binom{g+c-1}{c-1}\frac{g}{c}\cdot\frac{g-1}{c+1}=\binom{g+c-1}{c+1},$$

ae expressio porro multiplicata per $\frac{g-2}{c+2}$ dabit hanc characterem: $\binom{g+c-1}{c+2}$. s notatis nanciscimur nunc hanc seriem:

$$s\binom{g+c-1}{c-1}=\binom{g+c-1}{c-1}+\binom{f}{1}\binom{g+c-1}{c}x+\binom{f}{2}\binom{g+c-1}{c+1}x^2$$
$$+\binom{f}{3}\binom{g+c-1}{c+2}x^3+\text{etc.}$$

16. Simili modo etiam alteram seriem transformare licebit; ubi autem be notandum, hanc transformationem duplici modo institui posse, prouti tores denominatorum 1, 2, 3, 4 etc. vel cum littera ζ vel cum η coniungun-. Primo igitur ex praecedente serie, si ζ loco f et η loco g scribamus, inebimus hanc seriem:

$$z\binom{\eta+c-1}{c-1}=\binom{\eta+c-1}{c-1}+\binom{\zeta}{1}\binom{\eta+c-1}{c}x+\binom{\zeta}{2}\binom{\eta+c-1}{c+1}x^2$$
$$+\binom{\zeta}{3}\binom{\eta+c-1}{c+2}x^3+\text{etc.}$$

autem loco f et g inverso ordine scribamus η et ζ, prodit

$$z\binom{\zeta+c-1}{c-1}=\binom{\zeta+c-1}{c-1}+\binom{\eta}{1}\binom{\zeta+c-1}{c}x+\binom{\eta}{2}\binom{\zeta+c-1}{c+1}x^2$$
$$+\binom{\eta}{3}\binom{\zeta+c-1}{c+2}x^3+\text{etc.}$$

utraque autem relatio manet eadem, scilicet

$$s=(1-x)^{c+f+g}z.$$

17. Quo clarius appareat, quantopere hae duae series pro z
se invicem discrepent, loco ζ et η scribamus valores assumtos, s

$$\zeta = -c - f \quad \text{et} \quad \eta = -c - g,$$

atque ambae posteriores series pro littera z erunt

$$z\binom{-g-1}{c-1} = \binom{-g-1}{c-1} + \binom{-c-f}{1}\binom{-g-1}{c}x + \binom{-c-f}{2}\binom{-g-1}{c+1}$$

$$z\binom{-f-1}{c-1} = \binom{-f-1}{c-1} + \binom{-c-g}{1}\binom{-f-1}{c}x + \binom{-c-g}{2}\binom{-f-1}{c+1}$$

18. Quo iam has series ad formam commodiorem revocemus

$$g + c - 1 = h \quad \text{et} \quad c - 1 = e,$$

ita ut sit

$$c = e + 1 \quad \text{et} \quad g = h - e;$$

hinc enim series nostra principalis erit

$$s\binom{h}{e} = \binom{h}{e} + \binom{f}{1}\binom{h}{e+1}x + \binom{f}{2}\binom{h}{e+2}x^2 + \binom{f}{3}\binom{h}{e+3}x^3$$

Binae autem sequentes series ex littera z formatae erunt

prior

$$z\binom{e-h-1}{e} = \binom{e-h-1}{e} + \binom{-e-f-1}{1}\binom{e-h-1}{e+1}x$$
$$+ \binom{-e-f-1}{2}\binom{e-h-1}{e+2}x^2 + \text{etc.},$$

posterior

$$z\binom{-f-1}{e} = \binom{-f-1}{e} + \binom{-1-h}{1}\binom{-f-1}{e+1}x$$
$$+ \binom{-1-h}{2}\binom{-f-1}{e+2}x^2 + \text{etc.};$$

ambae autem quantitates s et z ita a se invicem pendent, ut sit

$$s = (1-x)^{f+h+1}z.$$

$$\int \frac{d\varphi \cos. i\varphi}{(1 + aa - 2a\cos.\varphi)^{n+1}}$$

petito, cuius integrale a termino $\varphi = 0$ usque ad terminum $\varphi = 180^\circ$ prin
quidem per solam coniecturam conclusi[1]) esse

$$= \frac{\pi a^i}{(1 - aa)^{2n+1}} V$$

existente

$$V = \binom{n-i}{0}\binom{n+i}{i} + \binom{n-i}{1}\binom{n+i}{i+1} aa + \binom{n-i}{2}\binom{n+i}{i+2} a^4 + \text{etc.};$$

quae series, si cum nostra principali conferatur, ut sit

$$V = s\binom{h}{e},$$

praebebit

$$h = n + i \quad \text{et} \quad e = i,$$

tum vero

$$f = n - i \quad \text{et} \quad x = aa;$$

binae ergo alterae series hinc formatae erunt

prior

$$z\binom{-n-1}{i} = \binom{-n-1}{i} + \binom{-n-1}{1}\binom{-n-1}{i+1} a^2$$
$$+ \binom{-n-1}{2}\binom{-n-1}{i+2} a^4 + \text{etc.},$$

altera

$$z\binom{i-n-1}{i} = \binom{i-n-1}{i} + \binom{-n-i-1}{1}\binom{i-n-1}{i+1} a^2$$
$$+ \binom{-n-i-1}{2}\binom{i-n-1}{i+2} a^4 + \text{etc.},$$

1) Confer Commentationes indicis ENESTROEMIANI 672, 673, imprimis 674. *LEONHAR EULERI Opera omnia*, vol. I$_{16}$, p. XLV, 141, 168, 197. C. B.

quae series ex ipsa serie V oritur loco n scribendo $-n-1$. relatio inter s et z erit

$$s = (1-aa)^{2n+1} z:$$

tum vero est

$$V = s\binom{n+i}{i}.$$

20. Cum igitur sit

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{(1+aa-2a\cos.\varphi)^{n+1}} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}} V = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}\binom{n+i}{i}$$

in hac forma loco n scribamus $-n-1$ sitque

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{(1+aa-2a\cos.\varphi)^{-n}} \begin{bmatrix} \text{a } \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = 180^0 \end{bmatrix} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{-2n-1}} U,$$

erit

$$U = \binom{-n-1-i}{0}\binom{-n-1+i}{i} + \binom{-n-1-i}{1}\binom{-n-1+i}{i+1} aa$$

ideoque

$$U = z\binom{i-n-1}{i} = \binom{i-n-1}{i}(1-aa)^{-2n-1} s.$$

21. Ponamus iam

$$1 + aa - 2a\cos.\varphi = \triangle$$

et contemplemur hos duos valores integrales, quos modo sumus

I. $\displaystyle\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\triangle^{n+1}} = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{2n+1}}\binom{n+i}{i} s,$

II. $\displaystyle\int \triangle^n \partial\varphi \cos. i\varphi = \frac{\pi a^i}{(1-aa)^{-2n-1}}\binom{i-n-1}{i}(1-aa)^{-2n-1} s = \pi a^i$

consequenter inter has duas formulas integrales a termino $\varphi = 0$ $\varphi = 180^0$ extensas consequimur hanc relationem maxime memora

$$\int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\triangle^{n+1}} : \int \triangle^n \partial\varphi \cos. i\varphi = \binom{n+i}{i} : \binom{i-n-1}{i}(1-aa)^{2}$$

sive erit

$$\binom{n+i}{i}(1-aa)^{-n}\int \triangle^n \partial\varphi \cos. i\varphi = \binom{-n-1+i}{i}(1-aa)^{n+1}\int \triangle^{-n-}$$

22. Hoc postremum theorema iam ante aliquod tempus[1]) per sol
ductionem quoque erueram, atque adeo de eius demonstratione prope
desperaveram, quae nunc ex transformatione seriorum allata quasi sp
obtulit; unde praestantissimus usus huius transformationis, quae meri
fundissimae indaginis est censenda, eo clarius perspicitur.

23. Cum autem nuper[1]) idem hoc theorema proposuissem, ratio
inter binas formulas integrales aliquatenus ab hic inventa discrepare
interim tamen perfecte consentire deprehenduntur, si modo sequens pr
in subsidium vocetur, qua generatim est

$$\binom{n}{i} : \binom{-n-1}{i} = \binom{-n-1+i}{i} : \binom{n+i}{i},$$

cuius ratio inde est manifesta, quod in genere semper est

$$\binom{-a}{i} = \pm \binom{a+i-1}{i}$$

ideoque etiam

$$\binom{b}{i} = \pm \binom{-b-1+i}{i},$$

ubi signa superiora valent, si i fuerit numerus par, inferiora vero si
Hinc ergo erit

$$\binom{n+i}{i} = \pm \binom{-n-1}{i} \quad \text{et} \quad \binom{-n-1+i}{i} = \pm \binom{n}{i}.$$

24. Hinc igitur nostrum theorema adhuc concinnius enunciari
Si ponamus brevitatis gratia

$$\frac{1+aa-2a\cos.\varphi}{1-aa} = \Theta,$$

ita ut sit

$$\triangle = (1-aa)\Theta,$$

1) Vide notam ad p. 42 adiectam. C. B.

tum ista prodibit proportio:

$$\int \Theta^n \partial\varphi \cos. i\varphi : \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Theta^{n+1}} = \int \frac{\triangle^n \partial\varphi \cos. i\varphi}{(1-aa)^n} : \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi (1}{\triangle^{n+1}}$$

$$= \binom{-n-1+i}{i} : \binom{n+i}{i} = \binom{n}{i} : \binom{-n-1}{i}$$

sicque erit

$$\binom{n}{i} \int \frac{\partial\varphi \cos. i\varphi}{\Theta^{n+1}} = \binom{-n-1}{i} \int \Theta^n \partial\varphi \cos. i\varphi.$$

25. Ceterum quo transformationes hic expositae facilius ad accommodari queant, eas sequenti theoremate complectamur.

THEOREMA

Si cognita fuerit summa huius seriei:

$$\binom{h}{e} + \binom{f}{1}\binom{h}{e+1}x + \binom{f}{2}\binom{h}{e+2}x^2 + \binom{f}{3}\binom{h}{e+3}x^3 + \ldots$$

quae ponatur $= S$, *tum etiam summae binarum sequentium se poterunt, quarum prior est ista:*

$$\binom{e-h-1}{e} + \binom{-e-f-1}{1}\binom{e-h-1}{e+1}x + \binom{-e-f-1}{2}\binom{e-h-1}{e+2}$$

cuius summa erit

$$\binom{e-h-1}{e} \frac{S}{\binom{h}{e}(1-x)^{f+h+1}},$$

ubi notetur esse

$$\binom{e-h-1}{e} = \pm \binom{h}{e},$$

ubi signum superius valet si i numerus par, inferius si impar; unde

$$\frac{\pm S}{(1-x)^{f+h+1}}.$$

Haec summa erit

$$\binom{-f-1}{e}\frac{S}{\binom{h}{e}(1-x)^{f+h+1}},$$

quae etiam hoc modo exprimi potest:

$$\pm\binom{f+e}{e}\frac{S}{\binom{h}{e}(1-x)^{f+h+1}}.$$

26. Si summae harum trium serierum statuantur ut sequitur

$$\binom{h}{e}+\binom{f}{1}\binom{h}{e+1}x+\binom{f}{2}\binom{h}{e+2}x^2+\binom{f}{3}\binom{h}{e+3}x^3+\text{etc.},$$

$$\binom{e-h-1}{e}+\binom{-e-f-1}{1}\binom{e-h-1}{e+1}x+\binom{-e-f-1}{2}\binom{e-h-1}{e+2}x^2+\text{etc.},$$

$$\binom{-f-1}{e}+\binom{-h-1}{1}\binom{-f-1}{e+1}x+\binom{-h-1}{2}\binom{-f-1}{e+2}x^2+\text{etc.},$$

ita inter se referuntur, ut sit

$$\binom{e-h-1}{e}\mathfrak{b}=\binom{h}{e}(1-x)^{e+h+1}\mathfrak{P},$$

$$\binom{-f-1}{e}\mathfrak{b}=\binom{h}{e}(1-x)^{e+h+1}\mathfrak{c},$$

$$\binom{-f-1}{e}\mathfrak{P}=\binom{e-h-1}{e}\mathfrak{c}.$$

DISQUISITIONES ANALYTICAE SUPER EVOLUTIONE POTESTATIS TRINOMIA

$(1 + x + xx)^n$

Conventui exhibita die 17. Augusti 1778

Commentatio 722 indicis Enestroemiani

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 14 (1797/98), 1805, p. 75– 1

Summarium ibidem p. 66–67

SUMMARIUM

Feu Mr. Euler a consacré ce mémoire à la recherche de plusieurs propriét quables des coëfficiens de ce trinome développé. Il considère le plus grand coëf le moyen, qu'il indique, avec ceux qui le suivent, par les lettres

p, q, r etc. pour la puissance n^{me},

p', q', r' etc. pour la puissance $(n+1)^{me}$,

p'', q'', r'' etc. pour la puissance $(n+2)^{me}$

et ainsi de suite, et il détermine premierement les coëfficiens p, q, r etc. par l'e: au moyen du symbolisme dont il s'est servi dans ses derniers ouvrages pou: les coëfficiens des puissances du binome; après quoi, il s'attache à déterminer l qui subsiste entre les coëfficiens du même ordre dans les puissances consécutives d savoir entre les valeurs p, p', p'' etc., et enfin la relation entre les coëfficiens quelco respondans, dans les mêmes trois puissances consécutives, savoir la n^{me}, $(n+1)^{me}$ et De là, il passe à la détermination des coëfficiens q, r, s etc. exprimés par le seu

1) Confer hac cum Commentatione praeter Commentationes 326 et 551 praecedı Commentationem 709 huiusce voluminis. C. B.

xposant $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$ etc., et la sommation des séries dont les termes se rent dans les diagonales consécutives parallèles à celle que forment les dits termes ns.

1. Cum olim in *Novorum Commentariorum tomo XI* sub titulo *Observationum ytiearum*[1]), istam potestatem trinomialem multo studio essem perscrutatus, um egregia symptomata incidi, quae majore attentione Geometrarum non gna videbantur. Hanc ob rem nuper[2]) hoc idem argumentum denuo trac- suscepi atque nonnullis artificiis analyticis usus multo plura insignia enomena se mihi obtulerunt, quorum expositionem Geometris non ingratam confido.

2. Incipio igitur ab ipsa evolutione huius formulae

$$(1+x+xx)^n,$$

pro singulis valoribus exponentis n sequentes praebet expressiones in la subiuncta repraesentatas:

$$(1+x+xx)^n$$

$$1$$

$$1+x+xx$$

$$1+2x+3xx+2x^3+x^4$$

$$1+3x+6xx+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$$

$$1+4x+10xx+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8$$

$$1+5x+15xx+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7+15x^8+5x^9+x^{10}$$

etc.

1) Commentatio supra laudata, indicis Eneströmiani 326, *Leonhardi Euleri Opera* a vol. I 15, p. 50–69. C. B.

2) In Commentatione 709 supra laudata, vide p. 28 praesentis voluminis. C. B.

Hic scilicet ex qualibet potestate facillime sequens deducitr quolibet valore exponentis n quilibet coëfficiens cum binis p unam summam colligatur, obtinetur coëfficiens pro potestate nentis $n+1$ subscribenda.

3. Hanc tabulam aspicienti statim patet in qualibot c cientes terminorum usque ad medium, qui dignitatem x^n refer autem iterum eodem ordine decrescere usque ad ultimum te x^{2n}. Deinde etiam haud difficulter perspicitur pro potestate genere terminos initiales ita expressum iri:

$$1+nx+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{n(n-1)(nn+}{1\cdot 2\cdot 3\cdot}$$
$$+\frac{n(n-1)(n+1)(n-2)(n+12)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\text{etc.}$$

Hos autem terminos ulterius prosequi non attinet, quia in e bus nullus ordo deprehenditur.

4. Hic autem imprimis ad coëfficientem maximum seu quem pro potestate $(1+x+xx)^n$ in genere perpetuo statu vero terminos hunc sequentes ita repraesentabo: qx^{n+1}, rx^{n+2}, unde termini medium praecedentes erunt ordine retrogrado qx tx^{n-4} etc. Deinde vero pro potestate sequenti $(1+x+xx)^{n+}$ apice suo notaturus, scilicet p', q', r', s' etc., quas porro pro sequente $(1+x+xx)^{n+2}$ apici duplici designabo; pro sequentil quadruplici et ita porro.

5. His praemissis, in hac dissertatione ex seriebus su potissimum terminos medios maximis coëfficientibus affectos turus, qui sunt 1, x, $3x^2$, $7x^3$, $19x^4$, $51x^5$ etc., qui iunctim s seriem, cuius summam littera P indicabo, ita ut

$$P=1+x+3x^2+7x^3+19x^4+51x^5+\cdots+px^n+p'x^{n+1}+$$

6. Praeterea vero, quemadmodum isti termini ex tabula dum diagonalem sunt desumti, simili modo tales series forn

$$= x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 16x^5 + 45x^6 + \cdots + q x^{n+1} + q' x^{n+2} + q'' x^{n+3} + \text{etc.},$$
$$= x^4 + 3x^5 + 10x^6 + 30x^7 + \cdots\cdots\cdots + r x^{n+2} + r' x^{n+3} + r'' x^{n+4} + \text{etc.},$$
$$= x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + s x^{n+3} + s' x^{n+4} + s'' x^{n+5} + \text{etc.},$$
$$= x^8 + 5x^9 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + t x^{n+4} + t' x^{n+5} + t'' x^{n+6} + \text{etc.}$$

etc.

onstitutis propositum mihi est primo in valores litterarum minuscularum r, s etc. earumque derivatarum p', q', r', s' etc., p'', q'', r'', s'' etc. inquiquo facto etiam valores litterarum mainscularum P, Q, R, S etc. indagabo.

INVESTIGATIO LITTERARUM p, q, r, s etc.

. Cum p sit coëfficiens potestatis x^n ex evolutione formulae $(1 + x + xx)^n$ lae, istam formulam hoc modo repraesentemus:

$$(x(1 + x) + 1)^n.$$

uius evolutione utamur signandi modo iam aliquoties a me usitato, quo ientes similis potestatis binomialis per hos characteres designare soleo $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ etc., ita ut sit

$$\binom{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2},$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$\binom{n}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\binom{n}{\lambda} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lambda}.$$

Circa quos characteres hic annotasse iuvabit in genere semper esse

$$\left(\frac{n}{\lambda}\right) = \left(\frac{n}{n-\lambda}\right),$$

quandoquidem hi coëfficientes retro eundem ordinem servant; et qui[a coeffi]cientes extremi sunt unitas, erit

$$\left(\frac{n}{0}\right) = \left(\frac{n}{n}\right) = 1.$$

Deinde, quia ex lege progressionis tam omnes termini primum ante[cedentes] quam termini ultimum sequentes evanescunt, erit ut sequitur:

$$\left(\frac{n}{-1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{n}{-2}\right) = \left(\frac{n}{n+2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{n}{-3}\right) = \left(\frac{n}{n+3}\right) = 0$$

etc.

8. His praemissis formula nostra $(x(1+x)+1)^n$ more solito [per] binomium evoluta dabit hanc seriem:

$$x^n(1+x)^n + \left(\frac{n}{1}\right)x^{n-1}(1+x)^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)x^{n-2}(1+x)^{n-2} + \left(\frac{n}{3}\right)x^{n-3}(1+x)^{n\ldots}$$

ubi notetur esse in genere

$$(1+x)^\lambda = 1 + \left(\frac{\lambda}{1}\right)x + \left(\frac{\lambda}{2}\right)x^2 + \left(\frac{\lambda}{3}\right)x^3 + \text{etc.}$$

Ex singulis igitur membris illius formae expositae depromi debent potestatem x^n continentes, quippe qui coniunctim sumti component t[erminum] medium px^n.

9. Primum autem membrum, $x^n(1+x)^n$, tantum terminum hui[us] praebet x^n. Ex membro autem secundo hanc formam habebit termin[...]

dus, qui est $\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}x^n$. Ex tertio membro potestas x^n oritur ex termino tertio, qui est $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}x^n$. Simili modo ex membro quarto deducitur $\binom{n}{3}\binom{n-3}{3}x^n$. Ex quinto oritur $\binom{n}{4}\binom{n-4}{4}x^n$ et ita porro. Hinc igitur verus valor litterae p ita colligitur:

$$p = 1 + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{3} + \binom{n}{4}\binom{n-4}{4} + \text{etc.}$$

10. Simili modo ex eadem evolutione colligere licet coëfficientes potestatis x^{n+1}, qui iunctim sumti dabunt valorem litterae q. Talis autem potestas ex primo membro orta erit $\binom{n}{1}x^{n+1}$. Ex secundo membro oritur $\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}x^{n+1}$, ex tertio membro $\binom{n}{2}\binom{n-2}{3}x^{n+1}$, ex quarto $\binom{n}{3}\binom{n-3}{4}x^{n+1}$ et ita porro, quocirca verus valor litterae q hoc modo exprimetur:

$$q = \binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{2} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{3} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{4} + \text{etc.},$$

ubi ob analogiam primus terminus, $\binom{n}{1}$, ita repraesentatus est intelligendus $\binom{n}{0}\binom{n}{1}$. Si enim, cum quilibet terminus duobus constet factoribus, priores factores constituunt hanc seriem: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{4}$ etc., posteriores vero istam: $\binom{n}{1}$, $\binom{n-1}{2}$, $\binom{n-2}{3}$, $\binom{n-3}{4}$ etc.

11. Pari modo ex potestatibus x^{n+2}, quae ex singulis membris deducuntur, formabitur terminus rx^{n+2}; at vero primum membrum pro hac potestate praebet $1\cdot\binom{n}{2}x^{n+2}$ sive analogiae gratia $\binom{n}{0}\binom{n}{2}x^{n+2}$. Ex membro secundo oritur eadem potestas $\binom{n}{1}\binom{n-1}{3}x^{n+2}$, ex tertio membro $\binom{n}{2}\binom{n-2}{4}x^{n+2}$, ex quarto $\binom{n}{3}\binom{n-3}{5}x^{n+2}$ et ita porro; ex quibus ergo collectis nanciscimur valorem litterae r hoc modo expressum:

$$r = \binom{n}{0}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{3} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{4} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{5} + \text{etc.}$$

$$s = \left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{5}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-}{6}\right.$$

$$t = \left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{5}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{6}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-}{7}\right.$$

$$u = \left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{5}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{7}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-}{8}\right.$$

etc.

atque in genere, si potestati $x^{n+\lambda}$ tribuamus litteram z, erit

$$z = \left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{n}{\lambda}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{\lambda+1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{\lambda+2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-3}{\lambda+3}\right.$$

13. Manifestum hic est omnes terminos harum serierum forma generali $\left(\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right)$, quam observo semper huic esse aequ ita ut litterae α et β permutationem patiantur. Cum enim fact

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \alpha}$$

et

$$\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right) = \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)(n-\alpha-2)\cdots(n-\alpha-\beta+}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots \beta}$$

facta multiplicatione erit

$$\left(\frac{n}{\alpha}\right)\left(\frac{n-\alpha}{\beta}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \alpha\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots \beta}$$

ubi permutabilitas litterarum α et β in oculos incurrit.

14. Quodsi iam series ante inventae hoc modo immutentur, pro p inventa nullam mutationem patitur, reliquae vero s referentur:

$$= \binom{n}{3}\binom{n-3}{0} + \binom{n}{4}\binom{n-4}{1} + \binom{n}{5}\binom{n-5}{2} + \binom{n}{6}\binom{n-6}{3} + \text{etc.},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$z = \binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{0} + \binom{n}{\lambda+1}\binom{n-\lambda-1}{1} + \binom{n}{\lambda+2}\binom{n-\lambda-2}{2} + \text{etc.}$$

. Praeterea vero maxime memorabilis est haec conversio, qua est

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta} = \binom{\alpha+\beta}{\alpha}\binom{n}{\alpha+\beta}.$$

nim sit

$$\binom{\alpha+\beta}{\alpha} = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)\cdots(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \alpha}$$

$$\binom{n}{\alpha+\beta} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha \times (\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\beta)}$$

$$\binom{n}{\alpha+\beta} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\beta \times (\beta+1)\cdots(\beta+2)(\beta+\alpha)},$$

tum erit

$$\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\binom{n}{\alpha+\beta} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\beta \times 1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha},$$

n eandem formam resolvitur formula $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}$.

. Per hanc igitur transformationem superiores series sequenti modo i poterunt:

$$q = \binom{1}{0}\binom{n}{1} + \binom{3}{1}\binom{n}{3} + \binom{5}{2}\binom{n}{5} + \binom{7}{3}\Big($$

$$r = \binom{2}{0}\binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\Big($$

$$s = \binom{3}{0}\binom{n}{3} + \binom{5}{1}\binom{n}{5} + \binom{7}{2}\binom{n}{7} + \binom{9}{3}\Big($$

. . . .

. . . .

. . . .

$$z = \binom{\lambda}{0}\binom{n}{\lambda} + \binom{\lambda+2}{1}\binom{n}{\lambda+2} + \binom{\lambda+4}{2}\binom{n}{\lambda+4} + \binom{\lambda+6}{3}\Big(_{\lambda}$$

17. Notari adhuc meretur alia transformatio, quae ad calc
cum inprimis est accommodata. Cum enim ex prima forma si

$$z = \binom{n}{\lambda} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{\lambda+1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{\lambda+2} + \text{etc.},$$

quilibet terminus huius seriei est $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\lambda+\alpha}$, qui dicatur $= II$,
evolutione

$$II = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha+1)\cdots(n-2\alpha-\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha\times 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda+\alpha)}$$

Quodsi iam hic loco α scribamus $\alpha+1$, ut oriatur terminus
ergo erit

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2\alpha-\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+1)\times 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\lambda+\alpha+1)},$$

hic per illum divisus praebet quotum

$$\frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}.$$

ergo erit terminus sequens

$$\Pi \cdot \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}.$$

8. Quodsi ergo in hac serie more NEWTONIANO littera Π denotet quemterminum praecedentem, sequens semper erit

$$\Pi \cdot \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)};$$

cum primus terminus sit $\binom{n}{\lambda}$, ubi est $\alpha=0$, si hic designetur per Π, erminus secundus

$$=\Pi\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{(\lambda+1)};$$

i denuo vocetur Π, erit terminus tertius

$$=\Pi\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)}{2(\lambda+2)};$$

i denuo vocetur Π, erit terminus quartus

$$=\Pi\frac{(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)}{3(\lambda+3)}$$

porro. Hoc modo nostra series pro z hanc induet formam:

$$z=\binom{n}{\lambda}+\Pi\frac{(n-\lambda)(n-\lambda-1)}{1(\lambda+1)}+\Pi\frac{(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)}{2(\lambda+2)}$$
$$+\Pi\frac{(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)}{3(\lambda+3)}+\text{etc.},$$

cilicet perpetuo Π designat terminum praecedentem.

19. Hinc igitur, si loco λ successive scribamus valores 0, 1, 2, 3 etc., pro is litteris p, q, r, s etc. sequentes nanciscemur series:

$$p = 1 + \Pi\frac{n(n-1)}{1\cdot 1} + \Pi\frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 2} + \Pi\frac{(n-4)(n-5)}{3\cdot 3} +$$

$$q = \binom{n}{1} + \Pi\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} + \Pi\frac{(n-3)(n-4)}{2\cdot 3} + \Pi\frac{(n-5)(n-6)}{3\cdot 4} +$$

$$r = \binom{n}{2} + \Pi\frac{(n-2)(n-3)}{1\cdot 3} + \Pi\frac{(n-4)(n-5)}{2\cdot 4} + \Pi\frac{(n-6)(n-7)}{3\cdot 5} +$$

$$s = \binom{n}{3} + \Pi\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 4} + \Pi\frac{(n-5)(n-6)}{2\cdot 5} + \Pi\frac{(n-7)(n-8)}{3\cdot 6} +$$

etc.

20. Istae formae ad calculum numericum imprimis sunt accomm quod pro sola littera p ostendisse sufficiet. Quaeramus scilicet exemp valorem ipsius p pro casu $n = 6$, ac singulae eius partes sequenti m perientur:

$$\begin{aligned}
\text{I.} &= 1 &&= 1\\
\text{II.} &= 1\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 1} &&= 30\\
\text{III.} &= 30\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 2} &&= 90\\
\text{IV.} &= 90\cdot\frac{2\cdot 1}{3\cdot 3} &&= 20
\end{aligned}$$

ergo summa $= p = 141$.

21. Simili modo quaeramus valorem ipsius p pro casu $n =$ singulae partes sequenti modo colligentur:

$$\text{III.}\quad 132\cdot\frac{10\cdot 9}{2\cdot 2}=2970$$

$$\text{IV.}\quad 2970\cdot\frac{8\cdot 7}{3\cdot 3}=18480$$

$$\text{V.}\quad 18480\cdot\frac{6\cdot 5}{4\cdot 4}=34650$$

$$\text{VI.}\quad 34650\cdot\frac{4\cdot 3}{5\cdot 5}=16632$$

$$\text{VII.}\quad 16632\cdot\frac{2\cdot 1}{6\cdot 6}=924$$

ergo summa $p = 73789$.

22. Mox autem tradenmus modum multo expeditiorem singulos terminos um serierum ex binis praecedentibus eliciendi, unde facili calculo omnes res pro litteris p, q, r etc. pro singulis exponentibus n exhiberi poterunt ue omnes istos valores, quousque libuerit, continuare licebit. Hanc autem tionem primo seorsim pro numeris sub littera p contentis instituamus.

ESTIGATIO RELATIONIS INTER TERNOS VALORES CONSECUTIVOS p, p', p''.

23. Cum sit

$$p = 1 + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{3} + \text{etc.},$$

us seriei consideremus terminum quemcunque $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\alpha}$, quem vocemus H, ita ut facta evolutione sit

$$H = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha \times 1\cdot 2\cdot 3\cdots\alpha};$$

terminum autem, qui hunc sequitur, designemus per Φ, ut sit

$$\Phi = \left(\frac{n}{\alpha+1}\right)\left(\frac{n-\alpha-1}{\alpha+1}\right)$$

ideoque facta evolutione

$$\Phi = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2\alpha-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(\alpha+1)\times1\cdot2\cdot3\cdots(\alpha+1)};$$

hincque ergo habebitur

$$\frac{\Phi}{\Pi} = \frac{(n-2\alpha)(n-2\alpha-1)}{(\alpha+1)(\alpha+1)} \quad \text{ideoque} \quad \Pi = \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)\Phi}{(n-2\alpha)(n-2\alpha-1}$$

24. Iam pro valoribus sequentibus p' et p'' designemus valores respondentes per Φ' et Φ''; qui quoniam oriuntur ex valore Φ, scribatur $n+1$ et $n+2$, erit facta evolutione

$$\Phi' = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-2\alpha)}{1\cdot2\cdot3\cdots(\alpha+1)\times1\cdot2\cdot3\cdots(\alpha+1)},$$

unde patet fore

$$\Phi' : \Phi = \frac{n+1}{n-2\alpha-1}$$

hincque

$$\Phi' = \frac{n+1}{n-2\alpha-1}\,\Phi.$$

Simili modo, si hic quoque loco n scribamus $n+1$, habebimus

$$\Phi'' = \frac{n+2}{n-2\alpha}\,\Phi' \quad \text{sive} \quad \Phi'' = \frac{(n+1)(n+2)\Phi}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)}.$$

25. Hinc iam formemus hanc expressionem:

$$A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi'',$$

cuius ergo valor per ipsam litteram Φ ita exprimetur:

$$\Phi\left(A + \frac{B}{n-2\alpha-1} + \frac{C}{(n-2\alpha-1)(n-2\alpha)}\right),$$

r loco H valore ante dato per Φ expresso, nanciscemur sequentem ationem per Φ divisam:

$$A + \frac{B}{n-2a-1} + \frac{C}{(n-2a-1)(n-2a)} = \frac{(a+1)(a+1)}{(n-2a-1)(n-2a)},$$

a fractionibus liberata evadit

$$A(n-2a-1)(n-2a) + B(n-2a) + C = (a+1)(a+1).$$

26. Cum in hac aequatione littera a ad secundam dimensionem ascendat, us litterae A, B, C praecise sufficient, ut ex hac aequatione determinari nt. Primo igitur coaequemus utrinque terminos quadratum aa involventes, orietur ista aequatio:

$$4Aaa = aa \quad \text{ideoque} \quad A = \frac{1}{4}.$$

em modo coaequemus terminos ipsam litteram a involventes, unde perveniemus ad hanc aequationem:

$$2a(1-2n)A - 2aB = 2a,$$

fit

$$B = -\frac{2n-1}{4} - 1 = -\frac{2n+3}{4}.$$

que termini ab a immunes dant hanc aequationem:

$$(nn-n)A + nB + C = 1,$$

s reperitur

$$C = \frac{(n+2)^2}{4}.$$

27. His igitur valoribus inventis pro singulis terminis semper erit

$$A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi'' = H.$$

Quodsi ergo hinc computemus hanc formulam:

$$Ap + \frac{B}{n+1}p' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}p'',$$

ex primis terminis pro Φ assumtis orietur praecedens seriei p, qui est $=$ ex secundis autem terminis pro Φ assumtis orietur terminus primus, est 1; ex terminis autem tertiis conficitur terminus secundus, qui $\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right)$; ex terminis quartis pro Φ assumtis conficitur tertius, qui $\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)$; et ita porro; sicque omnes tres series hoc modo collectae ducent hanc seriem:

$$0 + 1 + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right) + \text{etc.},$$

quae est ipsa series pro p data. Hinc habebimus inter ternas litteras p p'' hanc aequationem:

$$Ap + \frac{B}{n+1}p' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}p'' = p.$$

28. Substituamus nunc loco litterarum A, B, C valores modo inver et nostra aequatio inter has ternas litteras erit

$$\frac{1}{4}p - \frac{2n+3}{4(n+1)}p' + \frac{n+2}{4(n+1)}p'' = p,$$

quae reducitur ad hanc:

$$\frac{n+2}{n+1}p'' - \frac{2n+3}{n+1}p' = 3p,$$

unde fit

$$p'' = p' + \frac{n+1}{n+2}(p' + 3p).$$

29. Hinc igitur facile pro singulis valoribus exponentis n omnes nu littera p designati definiri poterunt, dum quilibet ex duobus praecedent componitur. Ita sumto $n = 0$ erit $p = 1$ et $p' = 1$ ideoque tertius

$$p'' = 1 + \frac{1}{2}(1 + 3 \cdot 1) = 3.$$

do $n = 2$ ob $p = 3$ et $p' = 7$ erit terminus quintus

$$p'' = 7 + \frac{3}{4}(7 + 3 \cdot 3) = 19.$$

matur $n = 3$, ob $p = 7$ et $p' = 19$ erit terminus sextus

$$p'' = 19 + \frac{4}{5}(19 + 3 \cdot 7) = 51.$$

30. Si hoc modo ulterius progrediamur, poterimus hanc progressionem inuare quousque libuerit, ope formae

$$p' + \frac{n+1}{n+2}(p' + 3p) = p'',$$

nobis suppeditat sequentes determinationes:

$$
\begin{aligned}
51 &+ \tfrac{5}{6}(\;\;51 + 3 \cdot \;\;19) = \;\;141,\\
141 &+ \tfrac{6}{7}(\;\;141 + 3 \cdot \;\;51) = \;\;393,\\
393 &+ \tfrac{7}{8}(\;\;393 + 3 \cdot \;\;141) = \;\;1107,\\
1107 &+ \tfrac{8}{9}(\;\;1107 + 3 \cdot \;\;393) = \;\;3139,\\
3139 &+ \tfrac{9}{10}(\;\;3139 + 3 \cdot 1107) = \;\;8953,\\
8953 &+ \tfrac{10}{11}(\;\;8953 + 3 \cdot 3139) = 25653,\\
25653 &+ \tfrac{11}{12}(25653 + 3 \cdot 8953) = 73789
\end{aligned}
$$

etc.

respondere assumsimus litteram λ.

INVESTIGATIO RELATIONIS INTER TERNOS TERMINOS C

$z,\ z',\ z''$.

32. Cum sit

$$z = \binom{n}{\lambda} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{\lambda+1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{\lambda+2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{\lambda+3} +$$

huius seriei consideremus terminum quemcunque

$$\Pi = \binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\lambda+\alpha},$$

cuius valor evolutus est

$$\Pi = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-2\alpha-\lambda+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\alpha\times1\cdot2\cdot3\cdots(\lambda+\alpha)}.$$

Terminum iam hunc sequentem

$$\binom{n}{\alpha+1}\binom{n-\alpha-1}{\lambda+\alpha+1} = \Phi$$

evolvamus, unde fit

$$\Phi = \frac{n(n-1)(n-2\cdots(n-2\alpha-\lambda-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(\alpha+1)\times1\cdot2\cdot3\cdots(\lambda+\alpha+1)}.$$

Hinc ergo colligimus

$$\frac{\Phi}{\Pi} = \frac{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)}$$

ideoque

$$\Pi = \frac{(\alpha+1)(\lambda+\alpha+1)\Phi}{(n-2\alpha-\lambda)(n-2\alpha-\lambda-1)}.$$

33. Iam pro valoribus sequentibus z' et z'' designemus v respondentes per Φ' et Φ''; qui quoniam oriuntur ex valore scribatur $(n+1)$ et $(n+2)$, erit facta evolutione

$$dp \qquad n - 2a - \lambda - 1$$

...ue

$$dp' = \frac{(n+1)dp}{n - 2a - \lambda - 1}.$$

...ique modo erit

$$dp'' = \frac{n+2}{n - 2a - \lambda}\, dp' = \frac{(n+2)(n+1)dp}{(n - 2a - \lambda)(n - 2a - \lambda - 1)}.$$

...4. Hinc prorsus ut supra formemus hanc expressionem:

$$A\,dp + \frac{B}{n+1}\,dp' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\,dp'',$$

...valor per dp ita exprimitur:

$$dp\left(A + \frac{B}{n - 2a - \lambda - 1} + \frac{C}{(n - 2a - \lambda)(n - 2a - \lambda - 1)}\right).$$

...erum litteras A, B, C ita definiri oportet, ut formula aequalis evadat ...ermino praecedenti H. Substituto igitur loco H valore ante per dp ex... ...o nanciscemur sequentem aequationem a fractionibus iam liberatam:

$$\ldots 2a - \lambda - 1)(n - 2a - \lambda) + B(n - 2a - \lambda) + C = (a+1)(a+\lambda+1).$$

...5. Facta igitur evolutione et coaequatis primo utrinque terminis aa ...entibus prodit haec aequatio pro determinatione litterae A:

$$4aaA = aa \quad \text{ideoque} \quad A = \frac{1}{4}.$$

...modo si coaequentur termini simplicem litteram a involventes, per... ...ur ad sequentem aequationem:

$$(4a\lambda - 4na + 2a)A - 2aB = (\lambda+2)a,$$

Denique coaequatis terminis ab α liberis prodit aequatio

$$\frac{nn - 2n\lambda - n + \lambda\lambda + \lambda}{4} - \frac{(n-\lambda)(2n+3)}{4} + C = \lambda + 1,$$

unde fit

$$C = \frac{(n+2)^2}{4} - \frac{\lambda\lambda}{4}.$$

36. His igitur valoribus inventis pro singulis terminis semp

$$A\Phi + \frac{B}{n+1}\Phi' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}\Phi'' = \Pi.$$

Quodsi igitur hinc computemus istam formulam:

$$Az + \frac{B}{n+1}z' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}z'',$$

ex primis terminis pro Φ assumtis orietur praecedens seriei z, secundis autem terminis pro Φ assumtis orietur terminus pri tertiis terminis conficitur terminus secundus $\left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{\lambda+1}\right)$; ex qua pro Φ assumtis conficitur tertius, qui est $\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{\lambda+2}\right)$, et ita porro lectis oritur ipsa series pro z data

$$z = \left(\frac{n}{\lambda}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{n-1}{\lambda+1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{\lambda+2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-3}{\lambda+3}\right) + \text{e}$$

Relatio igitur inter z, z', z'' erit

$$Az + \frac{B}{n+1}z' + \frac{C}{(n+2)(n+1)}z'' = z.$$

37. Substituamus nunc loco litterarum A, B, C valores m et aequatio inter has ternas litteras erit

$$\frac{1}{4}z - \frac{2n+3}{4(n+1)}z' + \frac{(n+2)^2 - \lambda\lambda}{4(n+2)(n+1)}z'' = z,$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{(n+2)^2 - \lambda\lambda}{(n+2)(n+1)}z'' = \frac{2n+3}{n+1}z' + 3z,$$

unde colligitur

$$z'' = \frac{n+2}{(n+2)^2 - \lambda\lambda}\big((2n+3)z' + 3(n+1)z\big).$$

38. Tribuamus nunc litterae λ successive valores 0, 1, 2, 3, 4 etc. reperiemus sequentes relationes pro singulis litteris:

$$\frac{(n+2)^2 - 0^2}{(n+2)(n+1)}p'' = \frac{2n+3}{n+1}p' + 3p,$$

$$\frac{(n+2)^2 - 1^2}{(n+2)(n+1)}q'' = \frac{2n+3}{n+1}q' + 3q,$$

$$\frac{(n+2)^2 - 2^2}{(n+2)(n+1)}r'' = \frac{2n+3}{n+1}r' + 3r,$$

$$\frac{(n+2)^2 - 3^2}{(n+2)(n+1)}s'' = \frac{2n+3}{n+1}s' + 3s \qquad .$$

etc.

39. Cum igitur pro littera q habeamus hanc aequationem:

$$q'' = \frac{n+2}{(n+1)(n+3)}\big((2n+3)q' + 3(n+1)q\big),$$

casu $n = 0$ erit $q = 0$ et $q' = 1$, unde fit

$$q'' = \frac{2}{3}(3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = 2.$$

Nunc pro $n = 1$ ob $q = 1$ et $q' = 2$ erit

$$q'' = \frac{3}{2 \cdot 4}(5 \cdot 2 + 6 \cdot 1) = 6,$$

Iam sumto $n=3$ ob $q=6$ et $q'=16$ orit

$$q''=\frac{5}{4\cdot 6}(9\cdot 16+12\cdot 6)=45.$$

At casu $n=4$ ob $q=16$ et $q'=45$ orit

$$q''=\frac{6}{5\cdot 7}(11\cdot 45+15\cdot 16)=126.$$

40. Hic autem calculus multo laboriosior et taediosior est quam
cedens pro valoribus litterae p expositus. Verum alia methodus multo f
inde derivari poterit, qua omnes litteras q, r, s [etc.] per solam litteram p
suis derivatis p', p'' [etc.] determinare licebit; tum enim, postquam series
rorum p iam satis longe fuerit computata, inde etiam valores littera
r, s etc. multo leviori labore colligi poterunt, id quod in sequenti a
ostendemus.

DETERMINATIO LITTERARUM q, r, s, t etc. PER SOLAM PRIMAM p SUIS DERIVATIS

41. Posito brevitatis gratia nostro trinomio

$$1+x+xx=X$$

eius binas potestates X^n et X^{n+1} evolutas ita disponamus, ut pares pote
ipsius x sibi invicem subscriptae appareant, hoc modo:

$$\begin{aligned}
X^n &= 1+nx \qquad +\cdots+q\,x^{n-1}+px^n+q\,x^{n+1}+r\,x^{n+2}+s\,x^{n+3}+\text{et}\\
X^{n+1} &= 1+(n+1)x+\cdots+r'x^{n-1}+q'x^n+p'x^{n+1}+q'x^{n+2}+r'x^{n+3}+\text{e}
\end{aligned}$$

quo facto supra iam notavimus quemlibet coefficientem inferioris seriei a
superiori cum binis praecedentibus.

42. Per hanc igitur legem sequentes nanciscemur aequalitates:

$$p' = q + p + q = 2q + p,$$
$$q' = r + q + p,$$
$$r' = s + r + q$$
$$\text{etc.},$$

de colligimus sequentes determinationes:

$$q = \frac{p' - p}{2}, \quad r = q' - q - p, \quad s = r' - r - q, \quad t = s' - s - r \text{ etc.}$$

43. Manifestum est hic formulam $p' - p$ exprimere incrementum quantitis p, dum exponens n unitate augetur, quod cum per Δp exprimi soleat, equalitates inventae sequenti modo succinctius exhiberi poterunt:

$$q = \frac{1}{2}\Delta p \quad \text{sive} \quad 2q = \Delta p, \quad 2r = 2\Delta q - 2p, \quad 2s = 2\Delta r - 2q \text{ etc.}$$

44. Charactere autem hoc differentiali Δ in usum vocato, cum sit

$$2q = \Delta p, \quad \text{erit} \quad 2\Delta q = \Delta\Delta p$$

eoque

$$2r = \Delta\Delta p - 2p \quad \text{hincque} \quad 2\Delta r = \Delta^3 p - 2\Delta p,$$

quo porro fit

$$2s = \Delta^3 p - 3\Delta p \quad \text{ideoque} \quad 2\Delta s = \Delta^4 p - 3\Delta\Delta p,$$

rgo

$$2t = \Delta^4 p - 4\Delta\Delta p + 2p \quad \text{ideoque} \quad 2\Delta t = \Delta^5 p - 4\Delta^3 p + 2\Delta p.$$

inc porro fit

$$2u = \Delta^5 p - 5\Delta^3 p + 5\Delta p \quad \text{ideoque} \quad 2\Delta u = \Delta^6 p - 5\Delta^4 p + 5\Delta\Delta p,$$

45. Quodsi hos coëfficientes numericos attentius consideremu gressionis convenire deprehenditur cum serie Geometris satis nota valore z, cui ordinis index positus est λ, obtinebimus sequentem

$$2z = \Delta^{\lambda} p - \lambda \Delta^{\lambda-2} p + \frac{\lambda(\lambda-3)}{1\cdot 2} \Delta^{\lambda-4} p - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{1\cdot 2\cdot 3} \Delta^{\lambda-6} p$$

$$+ \frac{\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \Delta^{\lambda-8} p - \frac{\lambda(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda-8)(\lambda-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \Delta^{\lambda-1}$$

quam seriem eo usque tantum continuari oportet, quamdiu indic non evadunt negativi. Ita si sumamus $\lambda = 6$, quo casu fit $z = v$, generali utique prodit

$$2v = \Delta^6 p - 6\Delta^4 p + 9\Delta^2 p - 2p.$$

46. Quo indoles huius seriei clarius perspiciatur, meminisse formam

$$\frac{(x+\sqrt{xx-4})^n}{2^n} + \frac{(x-\sqrt{xx-4})^n}{2^n}$$

in sequentem seriem resolvi:

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-6} + \text{etc.}$$

Hoc igitur modo nostro scopo iam est satisfactum, cum omnes s, t etc. per solam primam p suasque derivatas p', p'', p''' etc. cuerimus.

47. Cum sit per tertiam formam supra [§ 16] expositam

$$p = 1 + \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{6}{3}\right)\left(\frac{n}{6}\right) + \text{etc.},$$

libet terminus in genere erit $\left(\frac{2\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{n}{2\alpha}\right)$, quem excipit iste sequens: $\left(\frac{2\alpha+2}{\alpha+1}\right)\left(\frac{n}{2\alpha+2}\right)$. m igitur facta evolutione sit

$$\left(\frac{2\alpha}{\alpha}\right) = \frac{2\alpha(2\alpha-1)(2\alpha-2)\cdots(\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \alpha}$$

ilique modo

$$\left(\frac{2\alpha+2}{\alpha+1}\right) = \frac{(2\alpha+2)(2\alpha+1)2\alpha\cdots(\alpha+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(\alpha+1)},$$

ec posterior forma per priorem divisa dat quotum

$$\frac{(2\alpha+2)(2\alpha+1)}{(\alpha+1)^2} = \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha+1},$$

quo erit

$$\left(\frac{2\alpha+2}{\alpha+1}\right) = \frac{4\alpha+2}{\alpha+1}\left(\frac{2\alpha}{\alpha}\right).$$

48. Hac ergo reductione adhibita sumto

$$\alpha = 1 \quad \text{erit} \quad \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{6}{2}\left(\frac{2}{1}\right);$$

nto

$$\alpha = 2 \quad \text{erit} \quad \left(\frac{6}{3}\right) = \frac{10}{3}\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{10}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{1};$$

$$\alpha = 3, \quad \text{fit} \quad \left(\frac{8}{4}\right) = \frac{14}{4}\left(\frac{6}{3}\right) = \frac{14}{4}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{1};$$

n si

$$\alpha = 4, \quad \text{fiet} \quad \left(\frac{10}{5}\right) = \frac{18}{5}\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{18}{5}\cdot\frac{14}{4}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{1}$$

$$+\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{n}{10}\right)+\text{etc.}$$

49. Nunc igitur videamus, quomodo formam finitam in
gari oporteat, cuius integrale intra datos terminos inclusum
seriem perducat. Hunc in finem contemplari conveniet
$(1+x)^n$, quippe cuius evolutio praebet hanc seriem:

$$1+\left(\frac{n}{1}\right)x+\left(\frac{n}{2}\right)xx+\left(\frac{n}{3}\right)x^3+\text{etc.},$$

cuius termini alterni iam continent characteres nostros litte

50. Hanc igitur seriem in duas partes discerpamus se
alternos ac ponamus

$$M=\ 1\quad+\left(\frac{n}{2}\right)xx+\left(\frac{n}{4}\right)x^4+\left(\frac{n}{6}\right)x^6+\text{etc}$$

$$N=\left(\frac{n}{1}\right)x+\left(\frac{n}{3}\right)\ x^3+\left(\frac{n}{5}\right)x^5+\left(\frac{n}{7}\right)x^7+\text{etc}$$

ita ut sit

$$(1+x)^n=M+N.$$

Nunc autem inquiramus, quomodo seriem priorem, M, per
ticas tractari oporteat, ut ipsa series proposita seu valor
oriatur.

51. Ad hoc efficiendum ducamus quantitatem M in
differentiale ∂v cuiuspiam functionis ipsius x, atque sequente
determinemus, ut intra certos termines, veluti ab $x=a$ us
cludantur, quas conditiones ita comparatas esse oportet, ut
ditionibus satisfiat:

$$1.\ \int xx\,\partial v = \frac{2}{1}v,$$

$$2.\ \int x^4\,\partial v = \frac{2\cdot 6}{1\cdot 2}v,$$

$$3.\ \int x^6\,\partial v = \frac{2\cdot 6\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}v,$$

$$4.\ \int x^8\,\partial v = \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}v$$

$$\text{etc.};$$

hoc enim modo integrale $\int M\,\partial v$ producet hanc seriem:

$$v + \frac{2}{1}\left(\frac{n}{2}\right)v + \frac{2\cdot 6}{1\cdot 2}\left(\frac{n}{4}\right)v + \frac{2\cdot 6\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{n}{6}\right)v + \text{etc.},$$

ita ut hoc modo id quod quaerimus nanciscamur,

$$p = \frac{\int M\,\partial v}{v}.$$

52. Formularum igitur integralium, quas hic exposuimus, quaelibet a praecedente pendet, ut sit

$$\int xx\,\partial v = \frac{2}{1}\int \partial v,$$

$$\int x^4\,\partial v = \frac{6}{2}\int xx\,\partial v,$$

$$\int x^6\,\partial v = \frac{10}{3}\int x^4\,\partial v,$$

$$\int x^8\,\partial v = \frac{14}{4}\int x^6\,\partial v$$

$$\text{etc.}$$

sicque in genere effici debet, ut fiat

$$\int x^{2m}\,\partial v = \frac{4m-2}{m}\int x^{2m-2}\,\partial v.$$

accommodari debent.

53. Cum igitur pro his terminis integrationis esse debeat

$$m\int x^{2m}\partial v = (4m-2)\int x^{2m-2}\partial v,$$

ponamus esse generatim

$$m\int x^{2m}\partial v = (4m-2)\int x^{2m-2}\partial v + \Pi x^{2m-1},$$

ubi scilicet Π eiusmodi sit functio, ut pars subnexa x^{2m-1} utroqu
tam $x=a$ quam $x=b$ in nihilum abeat. Haec iam aequatio differ
per x^{2m-2} divisa dat

$$mxx\,\partial v = (4m-2)\partial v + (2m-1)\Pi\partial x + x\partial\Pi,$$

quae aequatio subsistere debet pro omnibus numeris m.

54. Hinc igitur ista aequatio in duas discerpi debebit, quar
contineat solos terminos littera m affectos, altera vero reliquos, quae
aequationes erunt

$$xx\,\partial v = 4\,\partial v + 2\Pi\partial x$$

et

$$0 = -2\,\partial v - \Pi\partial x + x\partial\Pi.$$

Ex priori fit

$$\partial v = \frac{2\Pi\partial x}{xx-4};$$

ex altera vero fit

$$\partial v = \frac{x\partial\Pi - \Pi\partial x}{2},$$

qui ambo valores inter se coaequati praebent hanc aequationem:

$$4\Pi\partial x = (xx-4)(x\partial\Pi - \Pi\partial x) = x^3\partial\Pi - xx\Pi\partial x - 4x\partial\Pi + 4$$

icque colligitur

$$\frac{\partial\Pi}{\Pi}=\frac{x\partial x}{xx-4},$$

de integrando fit

$$l\Pi=l\sqrt{xx-4}$$

oque

$$\Pi=C\sqrt{xx-4}$$

etiam

$$\Pi=C\sqrt{4-xx};$$

o valore invento assequimur nostrum differentiale assumtum

$$\partial v=\frac{2C\partial x}{\sqrt{4-xx}},$$

de fit

$$v=2C\text{A}\sin.\frac{x}{2}\cdot$$

55. Consideremus nunc formulam suffixam

$$\Pi x^{2m-1}=Cx^{2m-1}\sqrt{4-xx},$$

am deprehendimus triplici modo in nihilum abire posse: primo scilicet, ando $x=0$, casu excepto quo $m=0$; secundo, casu quo $x=2$; ac tertio, u quo $x=-2$, ex quibus ergo binos terminos illos a et b desumi oportet. autem hos binos terminos eligi conveniet, ut etiam altera integrationis rs, $\int N\partial v$, commode exprimatur. Quia enim posuimus

$$(1+x)^n=M+N,$$

am ad integrale $\int N\partial v$ est respiciendum, quod si penitus evanesceret, pro minis integrationis sine dubio id esset commodissimum, tum enim foret

$$\int(M+N)\partial v$$

e

$$\int\partial v(1+x)^n=\int M\partial v,$$

nsequenter haberemus $p=\frac{\int M\partial v}{v}\cdot$

unde conficitur

$$\int N\partial v = \left(\frac{n}{1}\right)\int x\partial v + \left(\frac{n}{3}\right)\int x^3\partial v + \left(\frac{n}{5}\right)\int x^5\partial v + \text{etc.},$$

ubi per easdem reductiones, quas pro littera M instituimus, qua
integralis ad praecedentem ope reductionis

$$\int x^{2m}\partial v = \frac{4m-2}{m}\int x^{2m-2}\partial v$$

reduci potest. Sumto enim $m = \frac{3}{2}$ erit

$$\int x^3\partial v = \frac{8}{3}\int x\partial v.$$

Sumto $m = \frac{5}{2}$ erit

$$\int x^5\partial v = \frac{16}{5}\int x^3\partial v.$$

Sumto $m = \frac{7}{2}$ erit

$$\int x^7\partial v = \frac{24}{7}\int x^5\partial v$$

etc.,

unde patet, si modo $\int x\partial v$ evanesceret, etiam sequentia omnia oss

57. Quoniam igitur invenimus

$$\partial v = \frac{2C\partial x}{\sqrt{(4-xx)}},$$

erit

$$x\partial v = \frac{2Cx\partial x}{\sqrt{(4-xx)}}$$

hincque

$$\int x\partial v = 2C\sqrt{4-xx},$$

ae expressio binis casibus vel $x = +2$ vel $x = -2$ evanescit. Quamobrem terminos integrationis constituamus $x = 2$ et $x = -2$, non solum partes ae subnexae $\Pi x^{2\omega-1}$, verum etiam totus valor integralis $\int N\partial v$ evanescet, ue adeo hoc casu quaesito nostro perfecte satisfecimus, cum sit

$$p = \frac{\int \partial v (1+x)^n}{v}.$$

58. Cum igitur invenerimus

$$\partial v = \frac{2C\partial x}{\sqrt{(4-xx)}},$$

us integrale ita sumtum, ut evanescat posito $x = 2$, erit

$$v = 2C\,\mathrm{A}\sin\frac{x}{2} - 2C\frac{\pi}{2},$$

ae expressio reducitur ad hanc:

$$v = -2C\,\mathrm{A}\cos\frac{x}{2};$$

de hoc integrali usque ad alterum terminum $x = -2$ extenso prodit $= -2C\pi$. His igitur valoribus substitutis erit formula quaesita

$$p = -\frac{1}{\pi}\int\frac{(1+x)^n\partial x}{\sqrt{(4-xx)}}.$$

ec scilicet formula integralis a termino $x = 2$ usque ad terminum $x = -2$ tensa verum praebebit valorem ipsius p.

59. Quo hanc formulam concinniorem reddamus, statuamus $x = 2\cos\varphi$, i evidens est casu $x = 2$ fieri angulum $\varphi = 0$; casu vero $x = -2$ fieri $= \pi$, ita ut hoc angulo introducto integrale capi debeat a termino $\varphi = 0$ que ad $\varphi = \pi$; tum vero erit

$$\partial x = -2\partial\varphi\sin\varphi \quad \text{et} \quad \sqrt{4-xx} = 2\sin\varphi,$$

a substitutione facta nanciscemur hanc aequationem:

$$p = +\frac{1}{\pi}\int(1+2\cos\varphi)^n\,\partial\varphi\left[\begin{matrix}\text{a}\ \varphi = 0\\ \text{ad}\ \varphi = \pi\end{matrix}\right].$$

DETERMINATIO RELIQUARUM LITTERARUM PER FORMULAS INTEGRALES

60. Hoc facile praestari poterit per relationes, quas supra int teras tradidimus. Primo scilicet habuimus $2q = \Delta p = p' - p$, ubi ex p, si loco n scribatur $n+1$. Quoniam igitur modo invenimus

$$p = \frac{1}{\pi}\int (1 + 2\cos\varphi)^n \partial\varphi,$$

erit

$$p' = \frac{1}{\pi}\int (1 + 2\cos\varphi)^{n+1} \partial\varphi,$$

hincque ergo erit

$$p' - p = \frac{2}{\pi}\int \cos\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^n \partial\varphi.$$

quo valore substituto reperietur

$$q = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi\cos\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^n \begin{bmatrix} \text{a } \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = \pi \end{bmatrix};$$

hinc ergo porro erit

$$q' = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi\cos\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^{n+1}.$$

61. Supra autem vidimus esse $r = q' - q - p$, nunc vero erit

$$q' - q = \frac{2}{\pi}\int \partial\varphi\cos\varphi^2 (1 + 2\cos\varphi)^n.$$

Hinc ergo si subtrahatur p, ob $2\cos\varphi^2 - 1 = \cos 2\varphi$ elicimus littera

$$r = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi\cos 2\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^n,$$

unde iterum fit

$$r' = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi\cos 2\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)^{n+1}.$$

62. Quoniam igitur supra invenimus $s = r' - r - q$, habebimus hic

$$r' - r = \frac{2}{\pi}\int \partial\varphi \cos\varphi \cos 2\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n.$$

Hinc ergo si subtrahatur q, ob $2\cos\varphi\cos 2\varphi - \cos\varphi = \cos 3\varphi$ erit

$$s = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos 3\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n.$$

Simili modo iam evidens est fore

$$t = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos 4\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n;$$

eodemque modo reperietur fore

$$u = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos 5\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n;$$

atque adeo in genere erit

$$z = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \cos \lambda\varphi\, (1 + 2\cos\varphi)^n.$$

63. Quoniam Analysis, qua hic usi sumus, prorsus est singularis et consueta, haud abs re erit veritatem harum formularum demonstratio lytica muniri, quam de singulis uno quasi labore sequenti modo in licebit. Incohandum erit ab evolutione formulae $(1 + 2\cos\varphi)^n$, quae ad hanc seriem:

$$1 + \binom{n}{1} 2\cos\varphi + \binom{n}{2} 4\cos\varphi^2 + \binom{n}{3} 8\cos\varphi^3 + \binom{n}{4} 16\cos\varphi^4 + \text{e}$$

Per notas autem angulorum reductiones[1]) constat fore

1) Vide e. g. Commentationem 246 indicis ENESTROEMIANI, § 6, Corollarium 3. *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I14, p. 549. C. B.

$$2\cos\varphi = 2\cos\varphi,$$

$$4\cos\varphi^2 = 2\cos 2\varphi + 2,$$

$$8\cos\varphi^3 = 2\cos 3\varphi + \ 6\cos\varphi.$$

$$16\cos\varphi^4 = 2\cos 4\varphi + \ 8\cos 2\varphi + \ 6,$$

$$32\cos\varphi^5 = 2\cos 5\varphi + 10\cos 3\varphi + 20\cos\varphi,$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$2^\alpha\cos\varphi^\alpha = 2\cos\alpha\varphi + 2\left(\frac{\alpha}{1}\right)\cos(\alpha-2)\varphi + 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos(\alpha$$

$$+ 2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos(\alpha-6)\varphi + \text{etc.},$$

ubi probe notandum est, quando terminus ultimus est absolut simplum capi debere; praeterea vero etiam cosinus anguloru prorsus omitti debent.

64. His igitur rite dispositis erit

$$(1+2\cos\varphi)^n = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)2\cos\varphi + \left(\frac{n}{2}\right)2(\cos 2\varphi + 1) + 2\left(\frac{n}{3}\right)(\mathrm{c}$$

$$+ 2\left(\frac{n}{4}\right)(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3) + 2\left(\frac{n}{5}\right)(\cos 5\varphi + 5\cos 3\varphi -$$

$$+ 2\left(\frac{n}{6}\right)(\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi + 10) + \text{etc.},$$

unde sequentes integrationes sunt petendae.

65. Incipiamus a prima littera p, ubi hanc seriem ducc tegrare oportet. Cum igitur in genere sit

$$\int \partial\varphi\cos m\varphi = \frac{1}{m}\sin m\varphi,$$

iste valor iam evanescit posito $\varphi = 0$, pro altero integrationi manifesto evanescit, si quidem omnes numeri n sunt integri. A

gitur soli termini absoluti relinquuntur; tum vero integrali rite sumto erit $\int \partial\varphi = \pi$, quo observato erit nostrum integrale

$$\int \partial\varphi\,(1+2\cos\varphi)^n = \pi + 2\left(\tfrac{n}{2}\right)\pi + 6\left(\tfrac{n}{4}\right)\pi + 20\left(\tfrac{n}{6}\right)\pi + \text{etc.}$$

quodsi hic forma generalis supra data consulatur, hi coëfficientes numerici revocentur ad formas $\left(\tfrac{2}{1}\right)$, $\left(\tfrac{4}{2}\right)$, $\left(\tfrac{6}{3}\right)$ etc., prorsus uti veritas formulae postulat. Erit enim

$$p = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi\,(1+2\cos\varphi)^n = 1 + \left(\tfrac{2}{1}\right)\left(\tfrac{n}{2}\right) + \left(\tfrac{4}{2}\right)\left(\tfrac{n}{4}\right) + \left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{n}{6}\right) + \text{etc.}$$

66. Pergamus ad secundam litteram, q, ubi superiorem seriem per $\partial\varphi\cos\varphi$ multiplicari et integrari oportet. Ad hoc observetur esse in genere

$$\int \partial\varphi\cos\varphi\cos m\varphi = \frac{1}{2(m+1)}\sin(m+1)\varphi + \frac{1}{2(m-1)}\sin(m-1)\varphi,$$

quae expressio posito $\varphi = \pi$ in nihilum abit, solo casu excepto quo $m=1$, quippe quo fit

$$\int \partial\varphi\cos\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\varphi = \frac{\pi}{2},$$

ex quo intelligitur ex superiori serie alios terminos hic non in computum venire, nisi qui contineant $\cos\varphi$, qui sunt

$$2\left(\tfrac{n}{1}\right)\cos\varphi + 2\left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)\cos\varphi + 2\left(\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{n}{5}\right)\cos\varphi + 2\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{n}{7}\right)\cos\varphi + \text{etc.}$$

Hi autem termini ducti in $\partial\varphi\cos\varphi$ et integrati, ob

$$\int 2\,\partial\varphi\cos\varphi^2 = \pi$$

dabunt per π divisi ipsum valorem

$$q = \left(\tfrac{n}{1}\right) + \left(\tfrac{3}{1}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right) + \left(\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{n}{5}\right) + \left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{n}{7}\right) + \text{etc.}$$

$$\cos 2\varphi \cos m\varphi = \frac{1}{2}\cos(m+2)\varphi + \frac{1}{2}\cos(m-2)$$

per $\partial\varphi$ multiplicando integrale pro termino $\varphi = \pi$ semper ev solo casu $m = 2$, quippe quo fit

$$\int \partial\varphi \cos 2\varphi^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Hic igitur ex serie superiori soli termini per $\cos 2\varphi$ affect veniunt, qui sunt

$$2\cos 2\varphi\left(\binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\binom{n}{8} + \text{et}\right.$$

Quia igitur $2\int\partial\varphi\cos 2\varphi^2 = \pi$, omnibus terminis colligendis dendo reperitur

$$r = \binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\binom{n}{8} + \text{etc}$$

68. Quo haec clariora reddantur ac facilius ad valorem commodari queant, evolutionem potestatis $(1 + 2\cos\varphi)^n$ s cosinus multiplorum anguli φ disponamus hoc modo:

$$(1+2\cos\varphi)^n = 1 + \binom{2}{1}\binom{n}{2} + \binom{4}{2}\binom{n}{4} + \binom{6}{3}\binom{n}{6} + \binom{8}{4}\binom{n}{8}$$

$$+ 2\cos\varphi\left(\binom{n}{1} + \binom{3}{1}\binom{n}{3} + \binom{5}{2}\binom{n}{5} + \binom{7}{3}\binom{n}{7} + \binom{9}{4}\binom{n}{9}\right.$$

$$+ 2\cos 2\varphi\left(\binom{n}{2} + \binom{4}{1}\binom{n}{4} + \binom{6}{2}\binom{n}{6} + \binom{8}{3}\binom{n}{8} + \binom{10}{4}\binom{n}{10}\right.$$

$$+ 2\cos 3\varphi\left(\binom{n}{3} + \binom{5}{1}\binom{n}{5} + \binom{7}{2}\binom{n}{7} + \binom{9}{3}\binom{n}{9} + \binom{11}{4}\binom{n}{11}\right.$$

. . . .

$$+ 2\cos\lambda\varphi\left(\binom{n}{\lambda} + \binom{\lambda+2}{1}\binom{n}{\lambda+2} + \binom{\lambda+4}{2}\binom{n}{\lambda+4} + \binom{\lambda+6}{3}\right.$$

$$+ \text{etc.}$$

69. Quodsi iam hanc aequationem per $\partial\varphi\cos\lambda\varphi$ multiplicemus et integremus, omnia haec integralia terminis praescriptis inclusa evanescent excepto membro $2\cos\lambda\varphi(\ldots)$, propterea quod productum $2\cos\lambda\varphi^2$ continet partem absolutam, unde per integrationem oritur π, ita ut sit

$$\int\partial\varphi\cos\lambda\varphi\,(1+2\cos\varphi)^n = \pi\left(\binom{n}{\lambda}+\binom{\lambda+2}{1}\binom{n}{\lambda+2}+\binom{\lambda+4}{2}\binom{n}{\lambda+4}+\text{etc.}\right),$$

qui valor per π divisus ipsum valorem ipsius z supra inventum praebet; unde veritas harum novarum expressionum luculenter est demonstrata.

70. Ceterum, si singulas series paragraphi penultimi vel leviter consideremus, deprehendimus eas ipsis litteris nostris p, q, r, s etc. esse aequales, ita ut nunc sit

$$(1+2\cos\varphi)^n = p + 2q\cos\varphi + 2r\cos2\varphi + 2s\cos3\varphi + 2t\cos4\varphi + \text{etc.},$$

ubi simul ratio est manifesta, cur litterae q, r, s etc. duplicentur, quippe quae in hoc est posita, quod in evolutione formulae $(1+x+xx)^n$ littera p semel tantum in medio, reliquae vero litterae bis, a medio aequidistantes, occurrunt. Ex quo haec egregia affinitas inter illas binas potestates $(1+x+xx)^n$ et $(1+2\cos\varphi)^n$ summa attentione digna est censenda.

INVESTIGATIO SUMMAE SERIEI

$$P = 1 + x + 3xx + 7x^3 + 19x^4 + \cdots + px^n + p'x^{n+1} + p''x^{n+2} + \text{etc.}$$

71. Quoniam huius seriei terminus generalis est px^n, quem sequuntur $p'x^{n+1}$ et $p''x^{n+2}$, inter has ternas quantitates p, p', p'' invenimus supra [§ 38] hanc relationem:

$$(n+2)p'' = (2n+3)p' + 3(n+1)p,$$

quam hoc modo ad usum nostrum accommodatam referamus:

$$3(n+1)p + (n+1)p' + (n+2)p' - (n+2)p'' = 0.$$

$\cdots + \text{etc.},$

eiusmodi operationes instituamus, quibus relatio modo allata obtinea
quod sequenti modo commodissime fiet:

$$\begin{aligned}
\frac{3\partial Px}{\partial x} &= \qquad\quad 3 + 6x + 27xx + \cdots + 3(n+1)p\, x^n + \text{etc.},\\
+\frac{\partial P}{\partial x} &= \qquad\quad 1 + 6x + 21xx + \cdots + (n+1)p'\, x^n + \text{etc.},\\
+\frac{\partial Px}{x\partial x} &= \frac{1}{x} + 2 + 9x + 28xx + \cdots + (n+2)p'\, x^n + \text{etc.},\\
-\frac{\partial P}{x\partial x} &= -\frac{1}{x} - 6 - 21x - 76xx - \cdots - (n+2)p''x^n - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Colligantur iam hae quatuor series in unam summam, atque obtine
sequentem aequationem:

$$\frac{3\partial Px}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Px}{x\partial x} - \frac{\partial P}{x\partial x} = 0,$$

quandoquidem omnes termini se mutuo destruunt.

73. Hoc ergo modo deducti sumus ad aequationem finitam differenti
primi gradus, quae per $x\partial x$ multiplicata et in ordinem redacta ita se hab

$$P\partial x(3x+1) + \partial P(3xx+2x-1) = 0,$$

unde ergo fit

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{\partial x(1+3x)}{1-2x-3xx},$$

quae aequatio integrata praebet

$$lP = -\frac{1}{2}l(1-2x-3xx) + lC,$$

consequenter

$$P = \frac{C}{\sqrt{(1-2x-3xx)}}.$$

ad constantem C determinandam notetur tantum nostram seriem propo-
m casu $x = 0$ praebere $P = 1$, unde patet sumi debere $C = 1$, ita ut sit
ma seriei

$$P = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}}.$$

74. Praeter ergo expectationem pertigimus ad summam algebraicam, quae
essio etiam ita est comparata, ut in seriem conversa ipsam nostram
em reproducat, id quod ostendisse operae erit pretium. Cum igitur sit

$$P = (1 - 2x - 3xx)^{-\frac{1}{2}},$$

minus trinomii partes posteriores coniunctim spectentur, evolutio nobis dabit

$$P = 1 + \frac{1}{2}(2x + 3xx) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(2x + 3xx)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}(2x + 3xx)^3 + \text{etc.},$$

m sufficiet ad potestatem tantum tertiam usque evolvisse. Hoc modo
iscemur

$$\begin{aligned} P = 1 + x + \frac{3}{2}xx + \frac{9}{2}x^3 + \text{etc.} \\ + \frac{3}{2}xx + \frac{5}{2}x^3 + \text{etc.} \\ = 1 + x + 3xx + 7x^3 + \text{etc.}, \end{aligned}$$

igitur perfecte congruit.

75. At vero haec eadem summa adhuc alio modo investigari potest, ex
mula scilicet integrali, quam pro valore litterae p invenimus

$$p = \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi (1 + 2\cos\varphi)^n \left[\begin{smallmatrix} \text{a}\ \varphi = 0 \\ \text{ad}\ \varphi = \pi \end{smallmatrix}\right].$$

enim formula, sumto $n = 0$, per x multiplicata dat terminum secundum, x;
porro $n = 2$, per xx multiplicata dat terminum tertium, $3xx$; quo obser-
summa quaesita ita poterit repraesentari:

$$= \frac{1}{\pi}\int \partial\varphi \,(1 + x(1 + 2\cos\varphi) + xx(1 + 2\cos\varphi)^2 + x^3(1 + 2\cos\varphi)^3 + \text{etc.}),$$

ubi probe est observandum in hac integratione quantitatem x tan-
stantem spectari, siquidem solus angulus φ est variabilis.

76. Evidens autem est seriem infinitam, in quam elementu-
oportet, esse geometricam, cuius ergo summa erit

$$\frac{1}{1-x(1+2\cos\varphi)}=\frac{1}{1-x-2x\cos\varphi},$$

sicque adeo pro P iam habemus hanc expressionem finitam:

$$P=\frac{1}{\pi}\int\frac{\partial\varphi}{1-x-2x\cos\varphi}\begin{bmatrix}\text{a }\varphi=0\\ \text{ad }\varphi=\pi\end{bmatrix},$$

quae aequatio ita poterit exhiberi:

$$P=\frac{1}{\pi(1-x)}\int\frac{\partial\varphi}{1-\frac{2x}{1-x}\cos\varphi}\begin{bmatrix}\text{a }\varphi=0\\ \text{ad }\varphi=\pi\end{bmatrix},$$

ubi iam brevitatis gratia statuamus $\frac{2x}{1-x}=k$, ut habeamus

$$P=\frac{1}{\pi(1-x)}\int\frac{\partial\varphi}{1-k\cos\varphi}.$$

77. Constat autem huius formulae $\frac{\partial\varphi}{1+n\cos\varphi}$ integrale esse

$$\frac{1}{\sqrt{(1-nn)}}\,\text{A}\cos\frac{\cos\varphi+n}{1+n\cos\varphi};$$

unde, si loco n scribamus $-k$, adipiscimur pro nostro casu

$$P=\frac{1}{\pi(1-x)\sqrt{(1-kk)}}\,\text{A}\cos\frac{\cos\varphi-k}{1-k\cos\varphi},$$

ubi constantis additione non est opus, quia haec expressio casu φ
evanescit. Faciamus igitur pro altero termino $\varphi=\pi$, unde fit

$$\cos\varphi=-1\quad\text{et}\quad\text{A}\cos\frac{\cos\varphi-k}{1-k\cos\varphi}=\text{A}\cos-1=\pi;$$

abebimus

$$P = \frac{1}{(1-x)\sqrt{(1-kk)}},$$

pressio, ob $k = \frac{2x}{1-x}$, abit in hanc:

$$P = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}},$$

ut ante.

. Cum sit

$$1 - 2x - 3xx = (1-x)^2 - 4xx = (1+x)(1-3x),$$

seriem nostram summandam duobus casibus fieri infinite magnam, scili-ro casu quo $x = -1$, altero vero quo $x = \frac{1}{3}$. Tum vero nostra series summam finitam, quando x continetur intra hos limites: -1 et $\frac{1}{3}$, om x extra hos limites accipiatur, tum summa semper erit imaginaria. nto $x = \frac{1}{4}$ habebitur haec summatio:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{7}{4^3} + \frac{19}{4^4} + \frac{51}{4^5} + \frac{141}{4^6} + \text{etc.} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

VESTIGATIO SUMMAE RELIQUARUM SERIERUM Q, R, S etc. SUPRA § 6 EXPOSITARUM

. Incipiamus a serie Q, quae est

$$Q = xx + 2x^3 + 6x^4 + \cdots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + q''x^{n+3} + \text{etc.},$$

imus terminus, xx, ex potestate $n = 1$ oritur; ubi, perinde ac si seriem 0 incheare velimus, praefigi debet terminus $0x$. Pro hac autem serie mus supra esse $q = \frac{1}{2}(p' - p)$, unde huius seriei summa ex serie p sequenti modo elici poterit.

80. Cum sit

$$P = 1 + x + 3xx + \cdots + px^n + p'x^{n+1} + \text{etc.},$$

erit

$$Px = x + xx + \cdots + p\,x^{n+1} + \text{etc.},$$

quae posterior series a priori subtracta relinquit

$$P(1-x) = 1 + 2xx + \cdots + (p'-p)x^{n+1} + \text{etc.}$$

Quare cum sit $p' - p = 2q$, erit

$$P(1-x) = 1 + 2Q;$$

sicque innotescit huius seriei summa, cum sit

$$Q = \frac{P(1-x)-1}{2}.$$

Modo ante autem vidimus esse

$$P = \frac{1}{\sqrt{(1-2x-3xx)}},$$

sicque habebimus

$$Q = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3xx}}{2\sqrt{(1-2x-3xx)}}.$$

81. Procedamus ad seriem R, quae ita se habebat:

$$R = x^4 + 3x^5 + 10x^6 + \cdots + rx^{n+2} + r'x^{n+3} + \text{etc.},$$

cuius primus terminus, x^4, ex potestate $n=2$ est ortus, unde praefi piendi sunt bini termini $0x^2 + 0x^3$, ad cuius summam inveniendam esse $r = q' - q - p$. Hinc, si sequentes operationes instituantur:

$$\begin{aligned} Q &= xx + 2x^3 + \cdots + qx^{n+1} + q'x^{n+2} + \text{etc.},\\ -Qx &= - x^3 - \cdots \phantom{+ qx^{n+1}} - q\,x^{n+2} - \text{etc.},\\ -Px^2 &= -xx - x^3 - \cdots \phantom{+ qx^{n+1}} - p\,x^{n+2} - \text{etc.},\end{aligned}$$

inde coniunctim fiet

$$Q(1-x)-Pxx = x^4 + 3x^5 + \cdots + (q'-q-p)x^{n+3} + \text{etc.} = R.\text{[1]})$$

82. Hoc igitur modo summam R determinavimus per binas series cedentes Q et P, quae cum iam sint cognitae, etiam summam seriei R braice per certam functionem ipsius x expressam sumus adepti, quae quo commodo evolvi queat, deinceps ostendemus.

83. Pro serie S, quae ita erat proposita:

$$S = x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \cdots + sx^{n+3} + s'x^{n+4} + \text{etc.},$$

ei tres termini evanescentes praefigi sunt censendi, scilicet $0x^3 + 0x^4 +$ siquidem a potestate $n=0$ incipere volimus. Supra autem invenimus $s = r' - r - q$, unde sequentes operationes instituamus:

$$\begin{aligned}
R &= x^4 + 3x^5 + 10x^6 + \cdots + rx^{n+2} + r'x^{n+3} + \text{etc.},\\
-Rx &= \quad\; - x^5 - 3x^6 - \cdots - \quad\cdots\quad - rx^{n+3} - \text{etc.},\\
-Qxx &= -x^4 - 2x^5 - 6x^6 - \cdots - \quad\cdots\quad - qx^{n+3} - \text{etc.},
\end{aligned}$$

quibus tribus seriebus collectis oritur haec series:

$$x^6 + \cdots + sx^{n+3} + \text{etc.},$$

quae est ipsa series S. Quocirca summa huius seriei per binas praece Q et R ita determinatur, ut sit

$$S = R(1-x) - Qxx,$$

cuius evolutio etiam satis simpliciter expediri poterit, uti mox ostende

1) Editio princeps:

$$Q(1-x) - Pxx = (q'-q-p)x^{n+3} = R.$$

C. I

$$\begin{aligned} S \quad &= \quad x^6 + 4x^7 + 15x^8 + \cdots + s\,x^{n+3} + s'x^{n+4} + \text{etc.}, \\ -Sx \quad &= \qquad\quad - x^7 - 4x^8 - \cdots - \;\cdot\;\cdot\; - s\,x^{n+4} - \text{etc.}, \\ -Rxx &= -x^6 - 3x^7 - 10x^8 - \cdots \;\cdot\;\cdot\; - r\,x^{n+4} - \text{etc.} \end{aligned}$$

Cum igitur $s' - s - r = t$, hae tres series collectae dabunt

$$S(1-x) - Rxx = x^8 + \cdots + t\,x^{n+4} + \text{etc.},$$

quae cum sit ipsa series T, erit

$$T = S(1-x) - Rxx.$$

85. Hinc igitur manifestum est singulas harum serierum satis sim
per binas praecedentes determinari posse atque adeo per legem penitu
formem. Eas coniunctim ob oculos ponamus.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{P(1-x)-1}{2}, \\ R &= Q(1-x) - Pxx, \\ S &= R(1-x) - Qxx, \\ T &= S(1-x) - Rxx, \\ U &= T(1-x) - Sxx \\ &\quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

unde patet omnes has summas secundum seriem recurrentem procedere,
scala relationis est $(1-x)$, $-xx$. Verum mox patebit hanc seriem adeo
geometricam.

86. Ad hoc ostendendum, cum facta evolutione sit

$$\frac{Q}{P} = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3xx}}{2},$$

camus $Q = Pv$; inde autem sublata irrationalitate, cum sit

$$\sqrt{1-2x-3xx} = 1-x-2v,$$

haec aequatio:

$$(1-x)^2 - 4xx = (1-x)^2 - 4v(1-x) + 4vv,$$

educitur ad istam:

$$v(1-x) - xx = vv,$$

robe notasse iuvabit.

. Iam pro serie R, si loco Q hunc valorem Pv substituamus, orietur quatio:

$$R = P(v(1-x) - xx)$$

per relationem modo notatam

$$R = Pvv.$$

porro loco Q et R valores inventos scribamus, nanciscemur simili modo

$$S = Pv\,(v(1-x) - xx) = Pv^3,$$
$$T = Pvv\,(v(1-x) - xx) = Pv^4,$$
$$U = Pv^3\,(v(1-x) - xx) = Pv^5,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Z = Pv^{\lambda-1}(v(1-x) - xx) = Pv^{\lambda+1}.$$

88. Quodsi iam has determinationes ad formulas integrales,
litteris p, q, r etc. invenimus, transferamus, quoniam invenimus

$$z = \frac{1}{\pi} \int \partial\varphi . \cos \lambda\varphi \, (1 + 2 \cos \varphi)^n,$$

si exponenti n successive valores tribuamus 0, 1, 2, 3, 4 etc., qui
a potestate x^λ inchoare est censenda, formula differentialis $\partial\varphi \cos \lambda$
seriem geometricam multiplicari debebit:

$$(1 + 2 \cos \varphi)^0 x^\lambda + (1 + 2 \cos \varphi)^1 x^{\lambda+1} + (1 + 2 \cos \varphi)^2 x^{\lambda+2} + \text{et}$$

cuius summa est

$$\frac{x^\lambda}{1 - x - 2 x \cos \varphi},$$

qua ergo in calculum introducta summa quaesita Z ita exprimetu

$$Z = \frac{1}{\pi} \int \frac{x^\lambda \partial\varphi \cos \lambda\varphi}{1 - x - 2 x \cos \varphi} \begin{bmatrix} \text{a } \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = \pi \end{bmatrix},$$

ubi quantitas x est constans.

89. Quoniam igitur hic invenimus istam summam, scilicet

$$Z = P v^\lambda = \frac{v^\lambda}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}}$$

existente

$$v = \frac{1 - x - \sqrt{(1 - 2x - 3xx)}}{2},$$

nunc huius ipsius formulae integralis valorem adeo algebraicur
poterimus, quandoquidem nunc novimus esse

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{x^\lambda \partial\varphi \cos \lambda\varphi}{1 - x - 2 x \cos \varphi} = \frac{v^\lambda}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}},$$

sive multiplicando per $\frac{\pi}{x^\lambda}$ habebimus

$$\int \frac{\partial\varphi \cos \lambda\varphi}{1 - x - 2 x \cos \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{(1 - 2x - 3xx)}} \left(\frac{v}{x}\right)^\lambda.$$

90. Quoniam haec integratio maiori attentione digna videtur, eam in mmodiorem formam transfundamus et, quoniam x et v hic ut constantes ctantur, ponamus $\frac{v}{x} = b$, atque ob

$$v = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3xx}}{2}$$

$$2bx = 1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3xx},$$

o aequatio sublata irrationalitate praebet

$$4bbxx - 4bx(1 - x) + (1 - x)^2 = (1 - x)^2 - 4xx,$$

o reducitur ad hanc:

$$bbx - b + bx = -x,$$

le ipsa quantitas x satis commode determinatur, cum fiat $x = \frac{b}{bb + b + 1}$ oque

$$1 - x = \frac{bb + 1}{bb + b + 1},$$

icque porro, cum esset

$$\sqrt{1 - 2x - 3xx} = 1 - x - 2bx,$$

t nunc

$$\sqrt{1 - 2x - 3xx} = \frac{1 - bb}{1 + b + bb}.$$

91. Quodsi ergo loco quantitatis x litteram b in nostrum calculum introcamus, integratio inventa ad hanc formam reducetur simpliciorem:

$$\int \frac{\partial\varphi \cos\lambda\varphi}{1 - 2b\cos\varphi + bb} \begin{bmatrix} \text{a } \varphi = 0 \\ \text{ad } \varphi = \pi \end{bmatrix} = \frac{\pi b^\lambda}{1 - bb},$$

us veritas ex calculis hactenus expeditis est deducta; verum etiam immeate et directo demonstrari potest, quo ipso praecedentia omnia eo magis roborabuntur.

92. Ad hoc igitur demonstrandum in subsidium vocemu integrationem, qua est

$$\int \frac{\partial\varphi}{\alpha+\beta\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha-\beta\beta)}}\,\mathrm{A}\cos\frac{\alpha\cos\varphi+\beta}{\alpha+\beta\cos\varphi}.$$

Fiat nunc $\alpha = 1+bb$ et $\beta = -2b$ et habebimus

$$\int \frac{\partial\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb} = \frac{1}{1-bb}\,\mathrm{A}\cos\frac{(1+bb)\cos\varphi-2b}{1-2b\cos\varphi+bb},$$

quod integrale iam evanescit posito $\varphi = 0$. Posito ergo pro a $\varphi = \pi$ hoc integrale evadet $\frac{\pi}{1-bb}$.

93. Quoniam igitur pro nostris terminis integrationis inve

$$\int \frac{\partial\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb} = \frac{\pi}{1-bb}$$

atque manifesto est

$$\int \partial\varphi = \pi \quad \text{ideoque} \quad \int \frac{\partial\varphi(1-2b\cos\varphi+bb)}{1-2b\cos\varphi+bb} = \pi,$$

hanc formam in duas partes distribuendo habebimus

$$\pi = (1+bb)\int \frac{\partial\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb} - 2b\int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb}$$

unde colligimus

$$\int \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb} = \frac{\pi b}{1-bb}.$$

94. Quoniam pro nostris terminis integrationis in genere c

$$\int \partial\varphi\cos i\varphi = 0,$$

siquidem i fuerit numerus integer, multiplicemus hanc formul infra per $1+bb-2b\cos\varphi$ atque obtinebimus

$$\int \frac{\partial\varphi\,((1+bb)\cos i\varphi - b\cos(i-1)\varphi - b\cos(i+1)\varphi)}{1+bb-2b\cos\varphi} = 0.$$

ec forma iam in tres partes secta nobis dabit

$$(1+bb)\int\frac{\partial\varphi\cos i\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb}=b\int\frac{\partial\varphi\cos(i-1)\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb}+b\int\frac{\partial\varphi\cos(i+1)\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb},$$

do derivamus hanc reductionem generalem:

$$\int\frac{\partial\varphi\cos(i+1)\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb}=\frac{1+bb}{b}\int\frac{\partial\varphi\cos i\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb}-\int\frac{\partial\varphi\cos(i-1)\varphi}{1-2b\cos\varphi+bb},$$

ius ope ex integralibus binis pro angulis $i\varphi$ et $(i-1)\varphi$ integrale pro angulo
$+1)\varphi$ determinari potest, unde sequentem tabulam conficere licebit:

$$\int\frac{\partial\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi}{1-bb},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi b}{1-bb},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 2\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi bb}{1-bb},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 3\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi b^3}{1-bb},$$

$$\int\frac{\partial\varphi\cos 4\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi b^4}{1-bb},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\int\frac{\partial\varphi\cos\lambda\varphi}{1+bb-2b\cos\varphi}=\frac{\pi b^\lambda}{1-bb},$$

orsus uti supra invenimus.

DEMONSTRATIO INSIGNIS THEOREMATIS NUMERICI CIRCA UN POTESTATUM BINOMIALIUM[1]

Conventui exhibita die 17. Septembris 1778

Commentatio 726 indicis ENESTROEMIANI

Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae 15 (1799/1802), 1806, p. 33–

Summarium ibidem p. 95–96

SUMMARIUM

En développant la puissance p du binome $1+x$, le coëfficient du terme comme tout le monde sait, $\frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdots\frac{p-q+1}{q}$. Pour désigner ce coëffi Mr. EULER a introduit dans l'analyse le caractère $\left(\frac{p}{q}\right)$. On sait donc ce que chez lui les caractères

$$\left(\frac{m}{0}\right),\ \left(\frac{m}{1}\right),\ \left(\frac{m}{2}\right),\ \left(\frac{n}{c}\right),\ \left(\frac{n}{c+1}\right),\ \left(\frac{n}{c+2}\right) \text{ etc.}$$

En faisant usage de ces caractères dans l'acceptation indiquée, le théorème dont ici la démonstration porte que

$$\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{n}{c}\right)+\left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{c+1}\right)+\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{c+2}\right)+\text{etc.}=\left(\frac{m+n}{m+c}\right)=\left(\frac{m+n}{n-c}\right).$$

L'immortel auteur avait déjà démontré cette vérité pour les cas où m est un nomb positif. Ici, il fait voir que cette égalité a lieu dans tous les cas, et que m et être des nombres entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

1) Confer hac cum dissertatione Commentationes iam laudatas in nota 1 ad p. minis I16 adiecta. C. B.

1. Si iste character $\left(\frac{p}{q}\right)$ designet coëfficientem potestatis x^q, qui ex evolutione binomii $(1+x)^p$ oritur, ita ut sit

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{1} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p-2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{p-q+1}{q},$$

iam ita pridem ostendi[1]), summam huiusmodi productorum

$$\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{n}{c}\right) + \left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{c+1}\right) + \left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{c+2}\right) + \text{etc.}$$

semper hac formula exprimi

$$\left(\frac{m+n}{m+c}\right) = \left(\frac{m+n}{n-c}\right),$$

siquidem hi duo characteres sunt inter se aequales, quia in genere est

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{p-q}\right).$$

2. Hoc elegans theorema tum temporis deduxi ex casibus specialibus, quibus erat primo $m = 1$, unde fit

$$1\left(\frac{n}{c}\right) + 1\left(\frac{n}{c+1}\right) = \left(\frac{1+n}{n-c}\right) = \left(\frac{1+n}{1+c}\right).$$

Deinde sumpto $m = 2$ etiam haud difficulter perspicitur esse

$$1\left(\frac{n}{c}\right) + 2\left(\frac{n}{c+1}\right) + 1\left(\frac{n}{c+2}\right) = \left(\frac{2+n}{2+c}\right).$$

Sumto autem $m = 3$ habebitur

$$1\left(\frac{n}{c}\right) + 3\left(\frac{n}{c+1}\right) + 3\left(\frac{n}{c+2}\right) + 1\left(\frac{n}{c+3}\right) = \left(\frac{3+n}{3+c}\right).$$

1) Vide Commentationem 575 indicis Enestroemiani conventui academiae Petropolitanae exhibitam die 13. Maii 1776; *Leonhardi Euleri Opera omnia* vol. I15, p. 528—568, imprimis p. 550. C. B.

Ex quibus casibus conclusio generalis satis tuto est deducta, ita ut strationi rigidae aequivalens sit censenda.

3. Interim tamen istud ratiocinium non nisi ad casus, quibus numerus integer positivus, extendi potest, etiamsi veritas multo latius atque adeo ad omnes plane valores litterae m extendi deprehendatur etiamnunc pro hoc theoremate demonstratio completa desideratur, q veritas pro omnibus casibus, sive litterae m et n denotent numero positivos sive negativos sive integros sive fractos, ostendatur. Talem demonstrationem hic sum traditurus.

LEMMA

4. *Si formula*

$$\frac{x^p}{(1-x)^{q+1}}$$

in seriem evolvatur secundum potestates ipsius x procedentem, tum in ha potestatis x^n coëfficiens erit $\left(\frac{n-p+q}{q}\right)$.

Cum enim sit

$$(1-x)^{-q-1} = 1 + \left(\frac{q+1}{1}\right)x + \left(\frac{q+2}{2}\right)xx + \left(\frac{q+3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{q+4}{4}\right)x^4 + \text{et}$$

in genere potestatis x^λ coëfficiens erit $\left(\frac{q+\lambda}{\lambda}\right)$, qui ergo etiam erit coëf potestatis $x^{p+\lambda}$ ex evolutione formulae $\frac{x^p}{(1-x)^{q+1}}$ resultantis. Fiat nunc $p+$ sive $\lambda = n-p$, atque coëfficiens potestatis x^n erit $= \left(\frac{n-p+q}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{q}\right.$

5. Hoc lemmate praemisso consideremus hanc expressionem:

$$\frac{z^\varrho}{(1-z)^{\sigma+1}}\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^m = V,$$

o qua, cum more solito fiat

$$\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^m = 1 + \binom{m}{1}\frac{z}{1-z} + \binom{m}{2}\frac{zz}{(1-z)^2} + \binom{m}{3}\frac{z^3}{(1-z)^3} + \text{etc.},$$

per seriem

$$V = \frac{z^c}{(1-z)^{c+1}} + \binom{m}{1}\frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+2}} + \binom{m}{2}\frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+3}} + \binom{m}{3}\frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+4}} + \text{etc.},$$

primo termino praefigi potest character $\binom{m}{0}$. Concipiantur nunc singula mbra huius seriei more solito in series evoluta et ex singulis colligantur nini potestate z^n affecti, atque per lemma praemissum ex primo membro $p=c$ et $q=c$, coëfficiens huius potestatis z^n ipsius erit $=\binom{m}{0}\binom{n}{c}$. Deinde secundo membro, ob $p=c+1$ et $q=c+1$, erit [potestatis] z^n coëfficiens $\binom{n}{c+1}$. Simili modo ex tertio membro nascitur potestatis z^n coëfficiens $\binom{n}{c+2}$ sicque porro. Hinc manifestum est ex tota forma V huius potestatis z fficientem esse proditurum

$$=\binom{m}{0}\binom{n}{c} + \binom{m}{1}\binom{n}{c+1} + \binom{m}{2}\binom{n}{c+2} + \text{etc.},$$

em brevitatis gratia littera C indicemus, haecque est ea ipsa progressio us summa demonstranda est aequari huic characteri $\binom{m+n}{m+c}$.

6. Hoc autem facile ostendetur, si modo observemus esse

$$1+\frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

igitur forma nostra erit

$$V = \frac{z^c}{(1-z)^{m+c+1}},$$

cuius evolutione potestatis z^n coëfficiens, ob $p=c$ et $q=m+c$, elicitur

$$=\binom{m+n}{m+c} = \binom{m+n}{n-c}.$$

$$\left(\frac{m}{0}\right)\left(\frac{n}{c}\right)+\left(\frac{m}{1}\right)\left(\frac{n}{c+1}\right)+\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{n}{c+2}\right)+\text{etc.} =$$

quae est demonstratio maxime rigorosa nostri theorema semper subsistit, quicunque numeri litteris m et n tribu

7. Casus hic singularis, quo $m=0$ et potestas $\Big(1+$ est in $l\left(1+\frac{z}{1-z}\right)$, peculiarem evolutionem postulat. C

$$V=\frac{z^c}{(1-z)^{c+1}}\,l\left(1+\frac{z}{1-z}\right),$$

ob

$$l\left(1+\frac{z}{1-z}\right)=\frac{z}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{zz}{(1-z)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{(1-z)^3}-\frac{1}{4}$$

erit

$$V=\frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+4}}-\frac{1}{4}\cdot$$

8. Hinc iam, ut supra fecimus, investigemus coëffic atque ex primo membro is prodit $=\left(\frac{n}{c+1}\right)$; ex secu $-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{c+2}\right)$, ex tertio membro $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{c+3}\right)$, ex quarto $-\frac{1}{4}$ sicque totus coëfficiens potestatis z^n ex evolutione expr

$$\left(\frac{n}{c+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{c+2}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{c+3}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{c+4}\right)+\frac{1}{5}\cdot\Big($$

9. Cum vero per transformationem sit

$$l\left(1+\frac{z}{1-z}\right)=l\,\frac{1}{1-z}=-l(1-z),$$

erit quoque

$$V=-\frac{z^c l(1-z)}{(1-z)^{c+1}}.$$

are cum sit

$$-l(1-z)=z+\frac{1}{2}zz+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{5}z^5+\text{etc.},$$

it

$$V=\frac{z^{c+1}}{(1-z)^{c+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{c+2}}{(1-z)^{c+1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{c+3}}{(1-z)^{c+1}}+\text{etc.},$$

cuius evolutione propterea si quaeratur coëfficiens potestatis z^n, is illi, em modo ante invenimus, aequalis esse debet.

10. Nunc vero per lemma praemissum primum membrum pro hoc coëfficiente praebet $\left(\frac{n-1}{c}\right)$; secundum membrum autem dat $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{c}\right)$, tertium $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n-3}{c}\right)$ et ita porro, ita ut hinc totus coëfficiens potestatis z^n sit

$$C=\left(\frac{n-1}{c}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{c}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n-3}{c}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n-4}{c}\right)+\text{etc.}$$

11. Hinc igitur adepti sumus sequentem aequationem inter binas progressiones inventas, quandoquidem semper erit

$$\left(\frac{n}{c+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{c+2}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{c+3}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{c+4}\right)+\text{etc.}$$
$$=\left(\frac{n-1}{c}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{c}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n-3}{c}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n-4}{c}\right)+\text{etc.},$$

ae duae progressiones debent esse inter se aequales, quicunque valores toris n et c tribuantur, cuius veritatis nonnullos casus perpendisse iuvabit

CASUS I, QUO $c=0$

12. Hoc ergo casu prior series evadet

$$\left(\frac{n}{1}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{3}\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n}{4}\right)+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{n}{5}\right)-\text{etc.},$$

$$\binom{n-1}{0} + \frac{1}{2}\cdot\binom{n-2}{0} + \frac{1}{3}\cdot\binom{n-3}{0} + \frac{1}{4}\cdot\binom{n-4}{0} + \frac{1}{5}\cdot\binom{n-5}{0} \ldots$$

Ubi notandum est, omnium harum formularum $\binom{n-\lambda}{0}$ valorem ... quamdiu λ non excedit n, hancque adeo seriem tantum usque ad ... $\binom{n-n}{0}$ esse continuandam, hocque modo posterior series ita est repra...

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

13. Hinc ergo nacti sumus sequentem aequationem maxime me...

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\cdot\binom{n}{3} - \frac{1}{4}\cdot\binom{n}{4} + \frac{1}{5}\cdot\binom{n}{5} - \cdots + \frac{1}{n}\cdot\binom{n}{n} \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n},$$

cuius veritatem aliquot exemplis ostendamus.

14. Sit 1°. $n = 1$; fiet prior series $\binom{1}{1} = 1$, altera vero pariter ...

2°. Sit $n = 2$; et, ob $\binom{n}{1} = 2$ et $\binom{n}{2} = 1$, erit prior series $= 2 -$ ... posterior vero series dat $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

3°. Sit $n = 3$; ob $\binom{n}{1} = 3$, $\binom{n}{2} = 3$ et $\binom{n}{3} = 1$ prior series dat $3 - \frac{3}{2}$ ... posterior vero series praebet $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

4°. Si $n = 4$, ob $\binom{n}{1} = 4$, $\binom{n}{2} = 6$, $\binom{n}{3} = 4$ et $\binom{n}{4} = 1$ prior se... $4 - \frac{6}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; altera vero series dat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ... valor est aequalis, ob $1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

5°. Si $n=5$, ob $\binom{n}{1}=5$, $\binom{n}{2}=10$, $\binom{n}{3}=10$, $\binom{n}{4}=5$ et $\binom{n}{5}=1$ erit or series $5-\frac{10}{2}+\frac{10}{3}-\frac{5}{4}+\frac{1}{5}$; posterior vero dat $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, valores calculo instituto accurate evadunt aequales.

Simili modo erit quoque

$$6-\frac{15}{2}+\frac{20}{3}-\frac{15}{4}+\frac{6}{5}-\frac{1}{6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}.$$

n erit

$$7-\frac{21}{2}+\frac{35}{3}-\frac{35}{4}+\frac{21}{5}-\frac{7}{6}+\frac{1}{7}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7};$$

gulis enim terminis subtractis remanet

$$6-11+11\tfrac{1}{3}-9+4-1\tfrac{1}{3}=0.$$

CASUS II, QUO $c=1$

15. Hoc casu erit prior series

$$\binom{n}{2}-\frac{1}{2}\binom{n}{3}+\frac{1}{3}\binom{n}{4}-\frac{1}{4}\binom{n}{5}+\frac{1}{5}\binom{n}{6}-\text{etc.};$$

era vero fit

$$\binom{n-1}{1}+\frac{1}{2}\binom{n-2}{1}+\frac{1}{3}\binom{n-3}{1}+\frac{1}{4}\binom{n-4}{1}+\text{etc.},$$

ao in has duas resolvitur

$$\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\frac{n}{5}+\text{etc.},$$
$$-1-1-1-1-1-\text{etc.},$$

o eo usque sunt continuandae, quoad superiores termini unitate fiant mi-res; huic ergo expressioni prior series semper erit aequalis.

16. Sit 1° $n=1$; ac prior series tota evanescit, quod etiam in posteriore enit.

2°. Sit $n = 2$; ac prior series dat 1, posterior vero dat $1 + ($

3°. Si $n = 3$, prior series dat $3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$, posterior vero ser

4°. Si $n = 4$, prior series praebet $6 - \frac{4}{2} + \frac{1}{3}$, posterior vero se

5°. Si $n = 5$, prior series dat $10 - \frac{10}{2} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4}$, posterio
$4 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$.

CASUS III, QUO $c = 2$

17. Hoc ergo casu prior series erit

$$\binom{n}{3} - \frac{1}{2}\binom{n}{4} + \frac{1}{3}\binom{n}{5} - \frac{1}{4}\binom{n}{6} + \frac{1}{5}\binom{n}{7} - \text{etc.},$$

posterior vero series praebet

$$\binom{n-1}{2} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{2} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{2} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{2} + \text{etc.}$$

Hic iam, quamdiu $n < 3$, omnes termini prioris seriei abeunt in nih
etiam in altera usu venire deprehenditur. Tantum autem hic unic
quo $n = 6$, evolvamus; quo casu prior series evadit $20 - \frac{15}{2} + \frac{6}{3} -$
vero series dat $10 + \frac{6}{2} + \frac{3}{3} + \frac{1}{4}$.

NOTA

18. In serie posteriore, quae erat

$$\binom{n-1}{c} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{c} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{c} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{c} + \text{etc.},$$

dubium videri potest, quod ea tantum usque ad terminum $\frac{1}{n}\binom{n-n}{c}$
debeat, cum tamen sequentes termini, in quibus superior numeru
tivus, non evanescant. Verum hic observandum est in his charact
merum inferiorem immediate ex analysi ortum conversum esse in s
plementum, siquidem ex forma generali $\frac{z^p}{(1-z)^{q+1}}$ coëfficiens ipsius z
est $\binom{n-p+q}{n-p}$, cuius loco scripsimus $\binom{n-p+q}{q}$ vi aequationis $\left(\frac{a}{b}\right) = ($

probe observandum est talem conversionem non valere, nisi superior numer[us] fuerit positivus, quemadmodum hactenus assumsimus; unde si etiam ad nu[-]meros negativos nostras progressiones extendere velimus, in serie saltem p[os-]teriori in singulis characteribus complementa inferiorum numerorum ser[vari] debebunt, hocque modo posterior progressio ita est repraesentanda:

$$\binom{n-1}{n-1-c} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{n-2-c} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{n-3-c} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{n-4-c} + \text{etc.}$$

Hic probe notetur omnes terminos, ubi inferiores numeri sunt negativi, p[ro] nihilo esse habendos. In postremo casu, quo erat $n = 6$ et $c = 2$, haec pr[o-]gressio erit

$$\binom{5}{3} + \frac{1}{2}\binom{4}{2} + \frac{1}{3}\binom{3}{1} + \frac{1}{4}\binom{2}{0} + \frac{1}{5}\binom{1}{-1} + \text{etc.}$$

Hic ergo omnes termini post $\binom{2}{0}$ sequentes evanescunt. Hoc autem observ[ato] etiam nostras expressiones ad valores negativos ipsius c extendere licebit.

CASUS IV, QUO $c = -1$

19. Hoc ergo casu prior progressio erit

$$\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \frac{1}{4}\binom{n}{3} + \frac{1}{5}\binom{n}{4} - \text{etc.},$$

altera vero progressio nunc ita se habebit

$$\binom{n-1}{n} + \frac{1}{2}\binom{n-2}{n-1} + \frac{1}{3}\binom{n-3}{n-2} + \frac{1}{4}\binom{n-4}{n-3} + \frac{1}{5}\binom{n-5}{n-4} + \text{etc.},$$

cuius seriei priores termini omnes evanescunt, donec superiores numeri ev[adant] negativi; tum vero sequentium terminorum ii tantum significatum habe[nt], in quibus numerus inferior adhuc est positivus vel 0; generatim enim omn[es] isti characteres, simul ac numeri inferiores evadunt negativi, semper ev[ane]scunt.

20. Hinc ergo intelligitur, ex progressione posteriore unicum
relinqui, qui erit $\frac{1}{n+1}\binom{-1}{0}$, cuius valor est $+\frac{1}{n+1}$, cui ergo progr
semper est aequalis.

1°. Si enim ponamus $n=1$, prior progressio dat $1-\frac{1}{2}$, pos
dat etiam $\frac{1}{2}$.

2°. Si $n=2$, prior series dat $1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, posterior vero et

3°. Si $n=3$, erit $1-\frac{3}{2}+\frac{3}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Similique modo porro habebitur

$$1-\frac{4}{2}+\frac{6}{3}-\frac{4}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5},$$

$$1-\frac{5}{2}+\frac{10}{3}-\frac{10}{4}+\frac{5}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

etc.

CASUS V, QUO $c=-2$

21. Prior progressio erit

$$\binom{n}{-1}-\frac{1}{2}\binom{n}{0}+\frac{1}{3}\binom{n}{1}-\frac{1}{4}\binom{n}{2}+\frac{1}{5}\binom{n}{3}-\text{etc.},$$

ubi primus terminus evanescit; posterior vero series erit

$$\binom{n-1}{n+1}+\frac{1}{2}\binom{n-2}{n}+\frac{1}{3}\binom{n-3}{n-1}+\frac{1}{4}\binom{n-4}{n-2}+\text{etc.},$$

cuius terminus generalis est $\frac{1}{\lambda}\binom{n-\lambda}{n-\lambda+2}$. Hic igitur ab initio om
evanescent, donec fiat $\lambda=n+1$, unde terminus fit $\frac{1}{n+1}\binom{-1}{1}=$,
sequitur terminus $\frac{1}{n+2}\binom{-2}{0}$, qui adhuc valorem dat $\frac{1}{n+2}$; seque
omnes iterum evanescunt, ita ut tota posterior series contrahatur
terminos:

$$-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)},$$

qui ergo est valor seriei prioris.

$$-\frac{1}{2}\binom{1}{0}+\frac{1}{3}\binom{1}{1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

°. Si $n=2$, habebitur

$$\frac{1}{2}\binom{2}{0}-\frac{1}{3}\binom{2}{1}+\frac{1}{4}\binom{2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}=\frac{1}{3\cdot 4}.$$

°. Si $n=3$, erit

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{20}=-\frac{1}{4\cdot 5}.$$

[CASUS VI, QUO $\varepsilon=-3$]

1. Hic ergo prior progressio erit

$$\binom{n}{-2}-\frac{1}{2}\binom{n}{-1}+\frac{1}{3}\binom{n}{0}-\frac{1}{4}\binom{n}{1}+\frac{1}{5}\binom{n}{2}-\frac{1}{6}\binom{n}{3}+\text{etc.},$$

o priores termini in nihilum abeunt. Pro posteriore vero serie, cuius us generalis est $\frac{1}{\lambda}\binom{n-\lambda}{n-\lambda+3}$, primus terminus significatum habens est $\binom{-1}{2}=\frac{1}{n+1}$; sequens autem terminus erit $\frac{1}{n+2}\binom{-2}{1}=-\frac{2}{n+2}$; denuo sequens $\frac{1}{n+3}\binom{-3}{0}=\frac{1}{n+3}$; reliqui vero omnes evanescunt, ita ut summa prioris r futura sit

$$\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}=\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

1. Ut rem exemplis illustremus, sit

°. $n=0$, quo casu summa debet[1]) esse $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{3}$, ipsa vero progressio $\binom{0}{0}=\frac{1}{3}$.

1) Editio princeps: dabit. C. B.

2°. Casu $n=1$ fit summa $\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{12}$, ipsa vero progress
$\frac{1}{3}\binom{1}{0}-\frac{1}{4}\binom{1}{1}=\frac{1}{12}$.

3°. Casu $n=2$ fit summa $\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{30}$, ipsa autem prog
$\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$.

Eodem modo habebimus

$$\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}=\frac{2}{4\cdot 5\cdot 6},$$
$$\frac{1}{3}-\frac{4}{4}+\frac{6}{5}-\frac{4}{6}+\frac{1}{7}=\frac{2}{5\cdot 6\cdot 7},$$
$$\frac{1}{3}-\frac{5}{4}+\frac{10}{5}-\frac{10}{6}+\frac{5}{7}-\frac{1}{8}=\frac{2}{6\cdot 7\cdot 8}.$$

25. Superfluum foret haec ulterius prosequi. Hinc enim sati fuerit $c=-4$, posteriorem progressionem, atque adeo summam turum esse

$$\frac{-1}{n+1}+\frac{3}{n+2}-\frac{3}{n+3}+\frac{1}{n+4}=\frac{-1\cdot 2\cdot 3}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4}$$

Prior vero series omissis terminis nihilo aequalibus erit

$$-\frac{1}{4}\binom{n}{0}+\frac{1}{5}\binom{n}{1}-\frac{1}{6}\binom{n}{2}+\frac{1}{7}\binom{n}{3}-\frac{1}{8}\binom{n}{4}+\text{etc.}$$

DE SUMMATIONE SERIERUM IN HAC FORMA CONTENTARUM[1]

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^6}{36}+\text{etc.}$$

Conventui exhibita die 31. Maii 1779

Commentatio 736 indicis Enestroemiani
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 3 (1809/10), 1811, p. 26–42

1. Ex iis, quae olim primus de summatione potestatum reciprocarum in lucem attuli[2], duo tantum casus derivari possunt, quibus summam seriei propositae assignare licet: alter scilicet, quo $a=1$, ubi ostendi huius seriei

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}$$

summam esse $=\frac{\pi\pi}{6}$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $=1$; alter vero casus est, quo $a=-1$; tum enim mutatis signis huius seriei

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\text{etc.}$$

1) Confer hac cum dissertatione Commentationes 20, 41, 61, 63, 130, 597; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I_{14} et I_{16}. C. B.

2) Vide Commentationes 41, 61, modo laudatas; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I_{14}, p. 80 et 152. C. B.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 2^2}+\frac{1}{9\cdot 2^3}+\frac{1}{16\cdot 2^4}+\text{etc.}$$

summam esse $=\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2$ denotante $l2$ logarithmum hyperb
qui est 0,693147180. Neque vero praeter hos casus ullus alius
quo summam assignare liceat.

2. Methodus autem, qua hunc postremum casum sum ad
extendi potest, ita ut inde plurimae insignes relationes inter
series huius formae reperiri queant. Innititur autem ista methodu

LEMMA

Si ponatur

$$p=\int\frac{\partial x}{x}ly \quad et \quad q=\int\frac{\partial y}{y}lx,$$

erit summa

$$p+q=lx\cdot ly+C,$$

siquidem constans ita definiatur, ut unico casui satisfaciat.

Hinc igitur sequentia problemata percurramus pro varia scil
inter x et y.

PROBLEMA 1

Si fuerit $x+y=1$, binas illas formulas

$$p=\int\frac{dx}{x}ly \quad et \quad q=\int\frac{dy}{y}lx$$

in series resolvere, ita ut hinc prodeat

$$p+q=lx\cdot ly+C.$$

1) Vide Commentationem 20, ibidem, imprimis p. 40. C. B.

3. Cum igitur sit $y = 1 - x$, erit

$$ly = -x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} - \text{etc.}$$

uo

$$p = -\int \frac{\partial x}{x}\, ly = \frac{x}{1} + \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \text{etc.}$$

que modo ob

$$x = 1 - y \quad \text{et} \quad lx = -y - \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \text{etc.}$$

$$q = -\int \frac{\partial y}{y}\, lx = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc.},$$

obrem harum duarum serierum summa erit $-lx \cdot ly + C$. Pro constante C enda consideremus casum, quo $x = 0$ et $y = 1$ ideoque $lx \cdot ly = 0$; tum erit

$$p + q = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6},$$

olligitur $C = \frac{\pi\pi}{6}$.

4. Quoties ergo fuerit $x + y = 1$, summa harum duarum serierum iunctim rum

$$\frac{x}{1} + \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \cdots + \frac{y}{1} + \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc.}$$

$= \frac{\pi\pi}{6} - lx \cdot ly$; hincque statim sequitur tertius casus supra memoratus. enim $x = \frac{1}{2}$ erit quoque $y = \frac{1}{2}$ ideoque ambae hae series inter se les [evadunt], unde sequitur fore

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\left(l\,\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2.$$

$$A = \frac{}{1} + \frac{}{4} + \frac{}{9} + \text{etc.} \quad \text{et} \quad B = \frac{}{1} + \frac{}{4} + \frac{}{9} + \text{etc.},$$

semper erit $A + B = \frac{\pi\pi}{6} - la \cdot lb$. Hinc ergo, si alterius harum serierum aliunde esset cognita, etiam alterius summa innotesceret. Hocque es ipsum problema, quod iam olim tractavi.

PROBLEMA 2

Si fuerit $x - y = 1$, binas illas formulas

$$p = \int \frac{dx}{x} ly \quad \text{et} \quad q = \int \frac{dy}{y} lx$$

in series resolvere, ita ut hinc prodeat

$$p + q = lx \cdot ly + C.$$

SOLUTIO

5. Cum hic sit $y = x - 1$, erit

$$ly = l(x-1) = lx + l\left(1 - \frac{1}{x}\right) = lx - \frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \text{etc.}$$

hincque

$$p = \int \frac{\partial x}{x} ly = \frac{1}{2}(lx)^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{etc.}$$

Deinde ob $x = 1 + y$ erit

$$lx = \frac{y}{1} - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \text{etc.}$$

ideoque

$$q = \int \frac{\partial y}{y} lx = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc.}$$

[co]nstante determinanda consideremus casum $y = 0$, quo fit $x = 1$ et [lx] $= 0$; tum igitur erit

$$p = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6} \quad \text{et} \quad q = 0,$$

[unde] definitur constans $C = \frac{\pi\pi}{6}$.

Hic igitur iterum duas habemus series, quarum coniunctim summam [assigna]re valemus:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{etc.}\\ &y - \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(lx)^2 + lx \cdot ly = \frac{\pi\pi}{6} + lx \cdot l\frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Quodsi ergo habeantur hae duae series:

$$A = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \text{etc.}$$

$$B = \frac{b}{1} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^3}{9} - \frac{b^4}{16} + \text{etc.},$$

[ita ut] sit $a = \frac{1}{x}$ et $b = y$, atque inter a et b haec detur relatio

$$ab + a = 1,$$

[erit]

$$A + B = \frac{\pi\pi}{6} - la \cdot lb\sqrt{a}.$$

[Consid]eremus casum, quo

$$b = a \left(= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{ob} \quad ab + a = 1 \right),$$

quocirca, existente $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, huius seriei

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \text{etc.}$$

summa erit

$$\frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2} la \cdot la\sqrt{a}.$$

8. Deinde etiam hic notatu dignus est casus, quo $b = -a$ atq
hoc enim casu erit

$$\frac{\pi\pi}{6} = la \cdot lb\sqrt{a}.$$

At quia $b = -a$, erit

$$-aa + a = 1$$

hincque

$$a = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Iam cum sit

$$lb\sqrt{a} = \frac{1}{2} labb,$$

ob

$$bb = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

erit $abb = -1$, unde sequitur fore

$$\frac{\pi\pi}{6} = l\frac{1+\sqrt{-3}}{2} \cdot l\sqrt{-1},$$

id quod egregie convenit cum expressione cognita peripheriae
logarithmos imaginarios.

9. Si poneremus hic $a = \frac{1}{2}$, foret $b = 1$ ideoque

$$B = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

prodiret tertius casus initio memoratus.

...t vero faciamus hic $b = \frac{1}{2}$ eritque $a = \frac{2}{3}$ et

$$lb\sqrt{a} = \frac{1}{2}lbba = \frac{1}{2}l\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}l6 \quad \text{et} \quad la = -l\frac{3}{2},$$

habebimus

$$\left.\begin{aligned} A = \frac{2}{1\cdot3} + \frac{2^2}{4\cdot3^2} + \frac{2^3}{9\cdot3^3} + \text{etc.}\\ + B = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{4\cdot2^2} + \frac{1}{9\cdot2^3} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}l\frac{3}{2}\cdot l6.$$

Sumatur hinc ex problemate primo hanc aequationem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{4\cdot3^2} + \frac{1}{9\cdot3^3} + \text{etc.}\\ + \frac{2}{1\cdot3} + \frac{2^2}{4\cdot3^2} + \frac{2^3}{9\cdot3^3} + \text{etc.}\end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - l3\cdot l\frac{3}{2}$$

remanebit

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{4\cdot2^2} + \frac{1}{9\cdot2^3} + \frac{1}{16\cdot2^4} + \text{etc.}\\ - \frac{1}{1\cdot3} - \frac{1}{4\cdot3^2} - \frac{1}{9\cdot3^3} - \frac{1}{16\cdot3^4} - \text{etc.}\end{aligned}\right\} = l3\cdot l\frac{3}{2} - \frac{1}{2}l\frac{3}{2}\cdot l6 = \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2.$$

...pti sumus hanc aequationem notatu dignam:

$$\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{4\cdot2^2} + \frac{1}{9\cdot2^3} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{4\cdot3^2} + \frac{1}{9\cdot3^3} + \text{etc.},$$

...tio peripheriae π penitus e calculo excessit. Verum eadem relatio ...ti modo facilius eruitur.

10. Manente evolutione prioris partis p, altera

$$lx = l(1+y) = ly + l\left(1 + \frac{1}{y}\right.$$

hinc

$$lx = ly + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \text{et}$$

erit

$$q = \int \frac{\partial y}{y}(lx) = \frac{1}{2}(ly)^2 - \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2} - \frac{1}{9y^3} + $$

Nunc igitur erit

$$p + q = lx \cdot ly + C;$$

ubi constans C inde definiri potest, quod posito y

$$p = \frac{1}{2}(l2)^2 + \frac{\pi\pi}{12} = \frac{1}{2}(l2)^2 - \frac{\pi\pi}{12}$$

et

$$q = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \text{etc.}$$

quibus valoribus substitutis pro hoc casu prodit p
quoniam $C = 0$.

11. Verum haec constans etiam alio modo defini
vitatis gratia

$$X = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + \text{et}$$

et

$$Y = -\frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2} - \frac{1}{9y^3} + \frac{1}{16y^4} - \text{etc}$$

ut habeamus

$$p = \frac{1}{2}(lx)^2 + X \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}(ly)^2$$

hincque fiet

$$p + q = \frac{1}{2}(lx)^2 + \frac{1}{2}(ly)^2 + X \quad) \quad lx$$

deducimus

$$Y - X = \frac{1}{2}(lx)^2 + \frac{1}{2}(ly)^2 - lx \cdot ly - C = \frac{1}{2}\left(l\frac{x}{y}\right)^2 - C,$$

otandum est esse $y = x + 1$. Iam ad constantem C definiendam conlur casus $x = \infty$, quo fit $X = 0$ et $Y = 0$, praeterea vero $l\frac{x}{y} = 0$, notatis erit $0 = -C$ ideoque $C = 0$.

2. Hinc igitur nacti sumus duas series X et Y, quarum differentia per logarithmos exprimitur, cum sit

$$Y - X = \frac{1}{2}\left(l\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(l\frac{y+1}{y}\right)^2$$

$= y + 1$. Ex hac forma sumto $y = 2$ statim fluit relatio ante inventa

$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{16\cdot 3^4} + \text{etc.}$$

autem modo nunc multo generalius habebimus

$$\frac{1}{1\cdot y} - \frac{1}{4\cdot y^2} + \frac{1}{9\cdot y^3} - \frac{1}{16\cdot y^4} + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{2}\left(l\frac{y+1}{y}\right)^2 + \frac{1}{1(y+1)} + \frac{1}{4(y+1)^2} + \frac{1}{9(y+1)^3} + \text{etc.},$$

pro y quicquid libuerit accipere licet.

PROBLEMA 3

Si inter x et y haec detur relatio: $xy + x + y = c$, binas formulas

$$p = \int \frac{\partial x}{x} ly \quad \text{et} \quad q = \int \frac{\partial y}{y} lx$$

ies resolvere, ita ut hinc prodeat

$$p + q = lx \cdot ly + C.$$

13. Hinc igitur primo erit

$$y = \frac{c - x}{1 + x},$$

cuius logarithmus per duas series sequentes exprimitur:

$$ly = \begin{cases} \quad lc - \dfrac{x}{c} - \dfrac{x^2}{2c^2} - \dfrac{x^3}{3c^3} - \dfrac{x^4}{4c^4} - \text{etc.} \\ -x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} + \text{etc.}, \end{cases}$$

unde fit

$$p = \int \frac{\partial x}{x} ly = \begin{cases} lc \cdot lx - \dfrac{x}{c} - \dfrac{x^2}{4c^2} - \dfrac{x^3}{9c^3} - \dfrac{x^4}{16c^4} - \text{etc.} \\ \qquad\qquad - x + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x^4}{16} - \text{etc.} \end{cases}$$

Simili modo, cum sit $x = \frac{c - y}{1 + y}$, erit

$$q = \int \frac{\partial y}{y} lx = \begin{cases} lc \cdot ly - \dfrac{y}{c} - \dfrac{y^2}{4c^2} - \dfrac{y^3}{9c^3} - \dfrac{y^4}{16c^4} - \text{etc.} \\ \qquad\qquad - \dfrac{y}{1} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{y^3}{9} + \dfrac{y^4}{16} - \text{etc.} \end{cases}$$

Atque hinc erit $p + q = lx \cdot ly + C$.

14. Pro constante definienda consideremus casum, quo $p = lc \cdot lx$ et

$$\left. \begin{aligned} q = (lc)^2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \text{etc.} \\ - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \frac{c^4}{16} - \text{etc.} \end{aligned} \right\}$$

sive

$$q = (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \frac{c^4}{16} - \text{etc.},$$

aequatio nostra evadit

$$p + q = lc \cdot lx + (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \text{etc.} = lc \cdot lx + C,$$

ergo termini $lc \cdot lx$ se mutuo destruunt, ita ut sit

$$C = (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \text{etc.}$$

15. Hic ergo quinque occurrunt series infinitae, quas sequenti modo in-
emus:

$$\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \frac{c^4}{16} + \text{etc.} = O,$$

$$\frac{x}{c} + \frac{x^2}{4 \cdot c^2} + \frac{x^3}{9 \cdot c^3} + \frac{x^4}{16 \cdot c^4} + \text{etc.} = P,$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc.} = Q,$$

$$\frac{y}{c} + \frac{y^2}{4 \cdot c^2} + \frac{y^3}{9 \cdot c^3} + \frac{y^4}{16 \cdot c^4} + \text{etc.} = R,$$

$$\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc.} = S;$$

bus litteris introductis nostra aequatio erit

$$lc \cdot lx - P - Q + lc \cdot ly - R - S = lx \cdot ly + (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - O,$$

de sequitur fore

$$O - P - Q - R - S = lx \cdot ly + (lc)^2 - lc \cdot lx - lc \cdot ly - \frac{\pi\pi}{6},$$

ae expressio contrahitur in sequentem:

$$O - P - Q - R - S = l\frac{x}{c} \cdot l\frac{y}{c} - \frac{\pi\pi}{6}$$

e mutatis signis

$$P + Q + R + S - O = \frac{\pi\pi}{6} - l\frac{x}{c} \cdot l\frac{y}{c}.$$

et

$$R + S = \frac{2y}{1} + \frac{2y^3}{9} + \frac{2y^5}{25} + \text{etc.},$$

tum vero

$$Q = \frac{\pi\pi}{12},$$

sicque inter binas series satis simplicem relationem sumus ass

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{x}{1} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} + \frac{x^7}{49} + \text{etc.} \\ +\frac{y}{1} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \frac{y^7}{49} + \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} lx \cdot ly,$$

ubi notandum est fore

$$xy + x + y = 1, \quad \text{hinc sive} \quad y = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{sive} \quad x = \frac{1}{1}$$

cuius aliquot exempla evolvisse iuvabit.

17. 1°. Si $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{3}$, unde sequitur aequatio

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{25\cdot 2^5} + \frac{1}{49\cdot 2^7} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + \frac{1}{49\cdot 3^7} + \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} l2$$

2°. Si $x = \frac{1}{4}$, erit $y = \frac{3}{5}$ ideoque

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{9\cdot 4^3} + \frac{1}{25\cdot 4^5} + \frac{1}{49\cdot 4^7} + \text{etc.} \\ +\frac{3}{1\cdot 5} + \frac{3^3}{9\cdot 5^3} + \frac{3^5}{25\cdot 5^5} + \frac{3^7}{49\cdot 5^7} + \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} l4 \cdot$$

. Quin etiam datur casus, quo $x = y$, quod evenit ponendo

$$x = y = -1 + \sqrt{2} = a;$$

gitur fiet

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{16} - \frac{1}{4}(la)^2.$$

3. In genere igitur etiam, quicquid fuerit c, operae pretium erit casum dere, quo fit $x = y$, quod evenit si[1])

$$x = y = -1 + \sqrt{1 + c} = a;$$

gitur erit

$$P = R = \frac{a}{c} + \frac{a^2}{4 \cdot c^2} + \frac{a^3}{9 \cdot c^3} + \frac{a^4}{16 \cdot c^4} + \text{etc.},$$

$$Q = S = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^4}{16} + \text{etc.},$$

oducitur ista aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{a^2}{4 \cdot c^2} + \frac{a^3}{9 \cdot c^3} + \frac{a^4}{16 \cdot c^4} + \text{etc.} \\ - \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^4}{16} + \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\left(l\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \text{etc.}\right).$$

lurimas egregias relationes inter terminos huiusmodi series derivare licet, rgo evadunt rationales, quoties fuerit $1 + c$ quadratum.

. Plures alias relationes inter binos numeros x et y evolvere liceret scilicet forma generali contentas:

$$xy \pm \alpha x \pm \beta y = \gamma,$$

utem posito $x = \beta t$ et $y = \alpha u$ in hanc simpliciorem mutatur:

$$tu \pm t \pm u = \frac{\gamma}{\alpha\beta},$$

---

[1]) Editio princeps: $x = y = -\frac{1 + \sqrt{1 + c}}{2} = a$. Correxit C. B.

modi series definitur, quos igitur in sequentibus theoremat

THEOREMA I

20. *Si habeantur hae duae series:*

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + etc.$$

et

$$Y = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + etc.$$

fueritque $x + y = 1$, *tum semper erit*

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - lx \cdot ly,$$

cuius theorematis demonstratio in § 4 iam est tradita.

COROLLARIUM I

21. Hic ante omnia manifestum est summas harum non posse, simulac vel x vel y unitatem superaverit. casibus videtur in infinitum excrescere; verum ea fit ad ob y negativum, logarithmus y imaginarius evadat.

COROLLARIUM II

22. Usus huius theorematis potissimum iis casibus parum ab unitate deficit ideoque prior series X parum c altera Y eo magis converget. Veluti si fuerit $x = \frac{9}{10}$, er

$$X = \frac{9}{10} + \frac{9^2}{4 \cdot 10^2} + \frac{9^3}{9 \cdot 10^3} + \frac{9^4}{16 \cdot 10^4} + \text{etc}$$

series vix convergens, cuius tamen summa per nostrum theorema facile proxime assignari poterit. Cum enim sit

$$Y = \frac{1}{10} + \frac{1}{4 \cdot 10^2} + \frac{1}{9 \cdot 10^3} + \frac{1}{16 \cdot 10^4} + \text{etc.},$$

quae series est maxime convergens, erit utique

$$X = \frac{\pi\pi}{6} - l\,10 \cdot l\,\frac{10}{9} - Y.$$

COROLLARIUM III

23. Ita in genere, si statuamus $x = \frac{m}{m+n}$ et $y = \frac{n}{m+n}$, erit

$$X = \frac{m}{1\,(m+n)} + \frac{m^2}{4\,(m+n)^2} + \frac{m^3}{9\,(m+n)^3} + \text{etc.}$$

et

$$Y = \frac{n}{1\,(m+n)} + \frac{n^2}{4\,(m+n)^2} + \frac{n^3}{9\,(m+n)^3} + \text{etc.};$$

tum igitur erit

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - l\,\frac{m+n}{m} \cdot l\,\frac{m+n}{n}.$$

THEOREMA II

24. *Si habeantur hae duae series:*

$$X = \frac{1}{x} - \frac{1}{4xx} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + \textit{etc.},$$

$$Y = \frac{1}{y} + \frac{1}{4yy} + \frac{1}{9y^3} + \frac{1}{16y^4} + \textit{etc.}$$

existente

$$y = x + 1,$$

cuius demonstratio colligitur ex § 12, dummodo litter
mutantur.

COROLLARIUM I

25. Quia hic est $y = x + 1$, posterior series, Y, n
prior X. Quin etiam, si prior series, X, fuerit adeo di
quando x est fractio unitate minor, posterior nihilomin
Veluti si fuerit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{3}{2}$; ipsae vero series er

$$X = \frac{2}{1} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{9} - \frac{2^4}{16} + \frac{2^5}{25} - $$

et

$$Y = \frac{2}{3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \frac{2^4}{16 \cdot 3^4} + \text{etc.};$$

consequenter erit

$$X - Y = \frac{1}{2}(l3)^2.$$

Quia vero posterior series, Y, parum convergit, eam 1
hoc modo reducimus:

$$\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6} - l3 \cdot l\frac{3}{2} - \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 3}$$

hincque habebimus hanc summationem:

$$\frac{2}{1} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{9} - \frac{2^4}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{2}(l3)^2 + \frac{\pi\pi}{6} - l3 \cdot l\frac{3}{2} - \Big(\frac{1}{1 \cdot 3} + $$

COROLLARIUM II

26. Sumamus nunc in genere $x = \frac{1}{n}$, ut sit series su

$$X = \frac{n}{1} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{9} - \frac{n^4}{16} + \text{etc.},$$

vero ob $y = \frac{1+n}{n}$ altera series erit

$$Y = \frac{n}{n+1} + \frac{nn}{4(n+1)^2} + \frac{n^3}{9(n+1)^3} + \text{etc.}$$

sitque

$$X = \frac{1}{2}(l(n+1))^2 + Y.$$

vero per theorema I est

$$Y = \frac{\pi\pi}{6} - l(n+1)\cdot l\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{1}{9(n+1)^3} - \text{etc.},$$

valore substituto erit

$$\frac{1}{2}(l(n+1))^2 + \frac{\pi\pi}{6} - l(n+1)\cdot l\frac{n+1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{9(n+1)^3} + \text{etc.}\right),$$

expressio contrahitur in hanc:

$$\frac{n}{1} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{9} - \frac{n^4}{16} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2}l(n+1)\cdot l\frac{nn}{n+1} + \frac{\pi\pi}{6} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{9(n+1)^3} + \text{etc.}\right).$$

THEOREMA III

27. *Si habeantur hae duae series:*

$$X = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + etc.$$

$$Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + etc.,$$

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2.$$

loco x scribendo $\frac{1}{x}$ erit

$$Y = \int \frac{\partial x}{x} l \frac{x}{1+x}$$

sive

$$Y = -\int \frac{\partial x}{x} l(1+x) + \int \frac{\partial x}{x} lx$$

hincque addendo

$$X + Y = \int \frac{\partial x}{x} lx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C,$$

ubi constans ex casu $x = 1$ facillime definitur. Quia enim ho
X quam $Y = \frac{\pi\pi}{12}$, erit constans $C = \frac{\pi\pi}{6}$ ideoque

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2.$$

COROLLARIUM I

28. Quodsi ergo pro x numerus quantumvis magnus accipia
theorematis summa seriei X, quae maxime est divergens, facilli
cum reducatur ad seriem Y, quae eo magis est convergens, qu
divergit.

COROLLARIUM II

29. Nunc vero ope theorematis secundi series

$$Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} - \text{etc.}$$

reducitur ad hanc formam:

$$Y = \frac{1}{2}\left(l\frac{x+1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{9(x+1)^3} + \text{etc.},$$

$$= \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{2}\left(l\frac{x+1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{9(x+1)^3} + \text{etc.}\right),$$

e expressio cum superiori § 26 egregie convenit, quia est

$$\frac{1}{2} l(x+1) \cdot l\frac{xx}{x+1} = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{2}\left(l\frac{x+1}{x}\right)^2,$$

evolventi facile patebit.

THEOREMA IV

30. *Si habeantur hae series:*

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} + \textit{etc.} \quad \textit{et} \quad Y = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \textit{etc.}$$

ente

$$xy + x + y = 1$$

$$x = \frac{1-y}{1+y} \quad \textit{vel} \quad y = \frac{1-x}{1+x},$$

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} lx \cdot ly.$$

onstratio manifesta est ex § 16.

COROLLARIUM 1

31. Hic iterum, ut supra, observandum est summas harum seriorum fieri ginarias, simulac litterae x et y unitatem superaverint. At si fuerit $x < 1$, semper alia series eiusdem formae exhiberi potest, cuius summa ab illa leat. Ita si fuerit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{3}$. At si x prope ad unitatem ac- t, veluti $x = \frac{9}{10}$, altera series, Y, maxime converget.

binas huiusmodi series inter se comparare liceat. Ad quod
quens theorema speciale subiungamus, quod demum per l
bages sum adeptus, quod autem nunc satis commode ex pr
rematibus deduci potest.

THEOREMA SPECIALE

33. *Si habeantur hae series sibi affines:*

$$A = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + etc.$$

et

$$B = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + etc.,$$

tum erit

$$2A + B = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(l3)^2.$$

DEMONSTRATIO

Cum ex theoremate primo, sumto $x = y = \frac{1}{2}$, sit

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2,$$

haec series sequenti modo resoluta repraesentari potest:

$$2\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{25\cdot 2^5} + \text{etc.}\right) - 1\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \text{etc}\right.$$

Nunc vero per theorema IV, sumto $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, hab
tionem:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{25\cdot 2^5} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2}l2\cdot l3 - \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{9\cdot 3^3}$$

nde vero ex theoremate secundo, sumto $x = 2$ et $y = 3$, erit

$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} - \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc.}$$

stituantur iam hi valores loco illarum serierum, ac pro parte sinistr
dibit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\pi\pi}{4} - l2\cdot l3 - 2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + \text{etc.}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc.}\right) \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2.$$

e concludimus fore

$$\left.\begin{aligned} &2\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \frac{1}{25\cdot 3^5} + \text{etc.}\right) \\ &+ 1\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 3^2} + \frac{1}{9\cdot 3^3} + \text{etc.}\right) \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - l2\cdot l3 - \frac{1}{2}\left(l\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(l2)^2$$

$$= \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(l3)^2 \quad \left(\text{ob } \left(l\frac{3}{2}\right)^2 = (l3)^2 - 2l2\cdot l3 + (l2)^2\right).$$

34. Quomodocunque autem theoremata hic data inter se combinentur
alia relatio inter binas huiusmodi series elici potest, multo minus autem
eiusmodi series simplices eruere licet, quarum summa absolute exhiberi
at, praeter casus iam indicatos, quos igitur hic coniunctim ob oculos po-
nus.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6},$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2,$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8}.$$

Praeterea vero adiungi potest adhuc ista series:

$$\frac{a}{1}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^7}{49}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{16}-\frac{1}{4}(la$$

existente $a=\sqrt{2}-1$.

Quanquam autem in hac serie valor ipsius a sit quaevis potestas seorsim evolvi debere videatur, tamen seriem recurrentem constituunt, in qua quilibet termin dentes definiri potest ope huius formulae:

$$a^{n+4}=6a^{n+2}-a^n,$$

cuius veritas inde elucet, quod sit, per a^n dividendo, $a^4=$
$a=\sqrt{2}-1$, erit $a^2=3-2\sqrt{2}$ et $a^4=17-12\sqrt{2}$, unde

OBSERVATIONES CIRCA FRACTIONES CONTINUAS IN HAC FORMA CONTENTAS[1]

$$S = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + \text{etc.}}}}}$$

Conventui exhibita die 18. Novembris 1779

Commentatio 742 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 4 (1811), 1813, p. 52—74

1. Cum plures adhuc inventae sint methodi ad fractiones continuas d-
uiendi earumque vicissim valores assignandi, nulla tamen earum ita c
nparata, cuius ope valores earum fractionum continuarum, quae in h
rma sunt contentae, investigari queant unico casu excepto, quo $n = 1$. M
ni enim a me iam olim[2]) istius formae

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \text{etc.}}}}}$$

1) Confer hac cum dissertatione Commentationes 71, 123, 522, 553, 593, 616, 745, 750 necn- *roductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. 1 cap. XVIII, LEONHARDI EULERI *Ope ia* vol. I_{14} p. 187 et 291; vol. I_{15} p. 314, 400 et 661; vol. I_{16} p. 34; vol. I_{16}[*] p. 178 et p. 23 I_8 p. 362. C. B.

2) Vide Commentationes supra laudatas 522, 553, 593 voluminis I_{16}, imprimis p. 33 et 686. C. B.

adeo per numeros rationales exprimi queat; quamobrem
super hoc argumento, quas istas summas inveni, plurimum
detur ad hanc doctrinam summi momenti uberius excolen

2. Quo indolem huius formae accuratius perscrutari ho
bus formulis sum complexus:

$$S = \frac{n}{1+A},$$

$$A = \frac{n+1}{2+B},$$

$$B = \frac{n+2}{3+C},$$

$$C = \frac{n+3}{4+D}$$

etc.,

ex quibus vicissim sequentes derivantur:

$$A = \frac{n}{S} - 1,$$

$$B = \frac{n+1}{A} - 2,$$

$$C = \frac{n+2}{B} - 3,$$

$$D = \frac{n+3}{C} - 4$$

etc.

3. Hinc iam facile patet semper esse

$$S < \frac{n}{1}, \quad A < \frac{n+1}{2}, \quad B < \frac{n+2}{3}, \quad C < \frac{n+3}{4}$$

iam in prima formula loco A scribatur valor $\frac{n+1}{2}$, qui est valde
, tum fractio $\frac{n}{1+A}$ erit nimis parva ideoque erit

$$S > \frac{n}{1+\frac{n+1}{2}} \quad \text{sive erit} \quad S > \frac{2n}{n+3}.$$

modo circa sequentes formulas ratiocinando fiet:

$$A > \frac{n+1}{2+\frac{n+2}{3}} \quad \text{sive} \quad A > \frac{3(n+1)}{n+8},$$

$$B > \frac{n+2}{3+\frac{n+3}{4}} \quad \text{sive} \quad B > \frac{4(n+2)}{n+15},$$

$$C > \frac{n+3}{4+\frac{n+4}{5}} \quad \text{sive} \quad C > \frac{5(n+3)}{n+24},$$

$$D > \frac{n+4}{5+\frac{n+5}{6}} \quad \text{sive} \quad D > \frac{6(n+4)}{n+35}$$

etc.

iet autem has formulas conspectui clarius exponi.

Tabula I		Tabula II	
$S = \frac{n}{1+A}$	$A = \frac{n}{S} - 1$	$S < \frac{n}{1}$	$S > \frac{2n}{n+3}$
$A = \frac{n+1}{2+B}$	$B = \frac{n+1}{A} - 2$	$A < \frac{n+1}{2}$	$A > \frac{3(n+1)}{n+8}$
$B = \frac{n+2}{3+C}$	$C = \frac{n+2}{B} - 3$	$B < \frac{n+2}{3}$	$B > \frac{4(n+2)}{n+15}$
$C = \frac{n+3}{4+D}$	$D = \frac{n+3}{C} - 4$	$C < \frac{n+3}{4}$	$C > \frac{5(n+3)}{n+24}$
$D = \frac{n+4}{5+E}$	$E = \frac{n+4}{D} - 5$	$D < \frac{n+4}{5}$	$D > \frac{6(n+4)}{n+35}$
$E = \frac{n+5}{6+F}$	$F = \frac{n+5}{E} - 6$	$E < \frac{n+5}{6}$	$E > \frac{7(n+5)}{n+48}$
$F = \frac{n+6}{7+G}$	$G = \frac{n+6}{F} - 7$	$F < \frac{n+6}{7}$	$F > \frac{8(n+6)}{n+63}$

que eorum aliquis extra limites in secunda tabula assignatos cadat, erit signum valorem assumtum esse falsum ideoque vel nimis ma nimis parvum; hocque modo plures pro S valores fingendo contin ad verum valorem accedere licebit. His igitur observationibus quosdam casus simpliciores evolvendos.

EVOLUTIO CASUS, QUO $n=2$ IDEOQUE

$$S=\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{2+\cfrac{4}{3+\cfrac{5}{4+\cfrac{6}{5+\text{etc.}}}}}}$$

5. Pro hoc igitur casu limites erunt

$$S<\frac{2}{1} \quad \text{et} \quad S>\frac{4}{5},$$

$$A<\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad A>\frac{9}{10},$$

$$B<\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad B>\frac{16}{17},$$

$$C<\frac{5}{4} \quad \text{et} \quad C>\frac{25}{26},$$

$$D<\frac{6}{5} \quad \text{et} \quad D>\frac{36}{37}$$

etc.

Sumamus igitur $S=1$ atque, si inde sequentium litterarum valo cantur, reperiemus

$$A=1, \quad B=1, \quad C=1, \quad D=1 \text{ etc.},$$

qui valores cum omnes infra assignatos limites cadant, id certum est valorem assumtum $S = 1$ veritati esse consentaneum, quod quidem f[...] ipsa forma perspicere licuisset.

EVOLUTIO CASUS, QUO $n = 3$ ET

$$S = \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{5}{3 + \cfrac{6}{4 + \cfrac{7}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

6. Hoc ergo casu limites nostri erunt

$$\begin{array}{ll}
S < \frac{3}{1}, & S > 1, \\[4pt]
A < 2, & A > \frac{12}{11}, \\[4pt]
B < \frac{5}{3}, & B > \frac{20}{18}, \\[4pt]
C < \frac{6}{4}, & C > \frac{30}{27}, \\[4pt]
D < \frac{7}{5}, & D > \frac{42}{38}
\end{array}$$

etc.

Hinc iam statim patet non esse $S = 2$; foret enim $A = \frac{1}{2}$, quod exc[...] Sumto $S = \frac{3}{2}$ fit $A = 1$, qui valor etiam extra limites cadit. Sumatur $S = \frac{4}{3}$ et prodibit $A = \frac{5}{4}$, qui valor iam intra limites cadit; hinc e[...] $B = \frac{6}{5}$, $C = \frac{7}{6}$, $D = \frac{8}{7}$, $E = \frac{9}{8}$, $F = \frac{10}{9}$ etc., qui valores cum omne[...] limites praescriptos cadunt, hoc certum est signum huius fractionis co[...] proposituo verum valorem esse $S = \frac{4}{3}$.

7. Commodo hic usu venit, ut omnes valores litterarum S, A, [...] D etc. manifesto ordine se insequantur, scilicet $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$ etc., [...]

diit progressio arithmetica, cuius differentiae primae sunt consta
concludere licet etiam pro reliquis casibus eiusmodi valores pro
A, B, C, D etc. prodire debere, qui differentiis continuo sumendis
differentias evanescentes perducant. Hoc observato relinquamus ip
valorem indefinitum indeque computemus valores sequentium litter

$$A = \frac{3 - S}{S}, \quad B = \frac{6S - 6}{3 - S}, \quad C = \frac{33 - 23S}{6S - 6}, \quad D = \frac{128S - 168}{33 - 23S}$$

Iam termini harum fractionum, scilicet denominatores, in hac ser
diuntur:

$$1, \quad S, \quad 3 - S, \quad 6S - 6, \quad 33 - 23S, \quad 128S - 168 \quad \text{etc.}$$

Hinc erunt

Differentiae primae $\quad S - 1, \; 3 - 2S, \; 7S - 9, \; 39 - 29S, \; 151S$

Differentiae secundae $\quad 4 - 3S, \; 9S - 12, \; 48 - 36S, \; 180S$

Differentiae tertiae $\quad 12S - 16, \; 60 - 45S, \; 216S$

Hic statim patet differentias primas non evanescere, quia ex iis nihi
prodirent diversi valores pro S sequentes $1, \frac{3}{2}, \frac{9}{7}, \frac{39}{29}$ etc. At ver
rentiae secundae nihilo aequentur, omnes praebent $S = \frac{4}{3}$, quem e
lorem differentiae tertiae et sequentes nihilo aequatae producunt, s
esse possumus revera fore $S = \frac{4}{3}$.

EVOLUTIO CASUS, QUO $n = 4$ ET

$$S = \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{2 + \cfrac{6}{3 + \cfrac{7}{4 + \text{etc.}}}}}$$

8. Hic statim adhibeamus methodum modo ante expositam et
indefinito S colligimus valores litterarum A, B, C, D etc., qui oru

$$A = \frac{4 - S}{S},\quad B = \frac{7S - 8}{4 - S},\quad C = \frac{48 - 27S}{7S - 8},\quad D = \frac{157S - 248}{48 - 27S},$$

$$E = \frac{1624 - 1001S}{157S - 248} \quad \text{etc.}$$

tum termini harum formularum in seriem disponantur et continuo diffe capiantur, ut sequitur:

	$1,\ S,$	$4 - S,$	$7S - 8,$	$48 - 27S,$	$157S - 248$
D. I.	$S - 1,$	$4 - 2S,$	$8S - 12,$	$56 - 34S,$	$184S - 296$
D. II.		$5 - 3S,$	$10S - 16,$	$68 - 42S,$	$218S - 352$
D. III.			$13S - 21,$	$84 - 52S,$	$260S - 420$
D. IV.				$105 - 65S,$	$312S - 504$

etc.

Hic statim perspicuum est neque differentias primas neque secundas satisfacere, quia ex iis nihilo aequatis diversi valores pro S essent pr ut vero differentiae tertiae omnes dant $S = \frac{21}{13}$, qui ergo pro vero valo tionis continuae propositae est habendus.

9. Quo autem de hoc certiores reddamur, exploremus istum val per methodum primo indicatam ex eoque computemus sequentes valo secundae columnae primae tabulae sumendo $n = 4$, ut sequitur:

$$A = \frac{31}{21},\quad B = \frac{43}{31},\quad C = \frac{57}{43},\quad D = \frac{73}{57},\quad E = \frac{91}{73}\quad \text{etc.},$$

qui valores omnes intra limites in tabula secunda datos cadere deprehen Praeterea vero egregium ordinem progressionis inter se servant, cum termini crescant secundum differentias 8, 10, 12, 14, 16 etc., quae binario continuo crescunt; cum contra quilibet alii valores pro S assu valores absurdos deducerent, qui mox extra limites praescriptos extravaga

$$S = \cfrac{}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{7}{3 + \cfrac{8}{4 + \text{etc.}}}}}$$

10. Applicemus hic etiam methodum ante usitatam, a
quentes valores:

$$A = \frac{5 - S}{S}, \quad B = \frac{8S - 10}{5 - S}, \quad C = \frac{65 - 31S}{8S - 10}, \quad D = \frac{18}{6}$$

$$E = \frac{2285 - 1219S}{188S - 340} \quad \text{etc.}$$

Iam termini harum fractionum in seriem disponantur et diff
sumantur hoc modo:

	$1,$	$S,$	$5 - S,$	$8S - 10,$	$65 - 31S,$	$188S - 340,$
D. I.		$S - 1,$	$5 - 2S,$	$9S - 15,$	$75 - 39S,$	$219S - 405,$
D. II.			$6 - 3S,$	$11S - 20,$	$90 - 48S,$	$258S - 480,$
D. III.				$14S - 26,$	$110 - 59S,$	$306S - 570,$
D. IV.					$136 - 73S,$	$365S - 680,$

etc.

11. Hinc differentiae tertiae nondum negotium conficiu
rentur diversi valores pro S; at ex differentiis quartis omn
valor $S = \frac{136}{73}$, qui ergo est verus valor fractionis continuae
dum primam methodum explorare velimus, egregie cum lim
convenire deprehendetur. Casus autem iam evoluti in ordin

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$S = 1$	$S = \frac{4}{3}$	$S = \frac{21}{13}$	$S = \frac{136}{73}$

... per ... numeris loco n assumtis praebeantur.

METHODUS SECUNDA
SUMMAS HARUM SERIERUM CONTINUARUM INVESTIGANDI

13. Quoniam vidimus valores litterarum S, A, B, C, D etc. semper secundum certam quandam legem uniformem progredi, dum litterae A, B, C, D etc. valores exprimunt similium fractionum continuarum vel uno vel duobus vel tribus etc. membris truncatarum[1]), cum sit

$$A = \cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4+\text{etc.}}}}, \quad B = \cfrac{n+2}{3+\cfrac{n+3}{4+\cfrac{n+4}{5+\text{etc.}}}}, \quad C = \cfrac{n+3}{4+\cfrac{n+4}{5+\cfrac{n+5}{6+\text{etc.}}}} \quad \text{etc.},$$

nullum est dubium, quin etiam retro formula proposita retro continuata eandem legem uniformem sit secutura. Sin autem nostra forma uno gradu retro continuetur, prodibit $\frac{n-1}{0+S}$, quam vocemus $= \alpha$, ita ut sit

$$\alpha = \frac{n-1}{S}.$$

Si duobus gradibus retro continuemus, erit

$$\frac{n-2}{-1+\alpha} = \beta.$$

Simili modo ultra retrogrediamur, nanciscemur has formulas:

$$\frac{n-3}{-2+\beta} = \gamma, \quad \frac{n-4}{-3+\gamma} = \delta, \quad \frac{n-5}{-4+\delta} = \varepsilon, \quad \frac{n-6}{-5+\varepsilon} = \zeta \quad \text{etc.}$$

1) Editio princeps: *truncatas*. C. B.

similem legem uniformitatis continuam deprehendi debere. Retro i
formulae continnentur, donec perveniatur ad numeratorem $= 0$,
habebitur talis forma:

$$\cfrac{0}{-\lambda + \cfrac{1}{-\lambda + 1 + \cfrac{2}{-\lambda + 2 + \cfrac{3}{-\lambda + 3 + \text{etc.}}}}}$$

quae autem expressio, etiamsi numerator est $= 0$, ideo non ipsa ev
est censenda, quia evenire potest, ut etiam denominator evanescat
hoc revera usu venit in nostris formis, quas sumus perscrutaturi;
igitur erit

$$0 = -\lambda + \cfrac{1}{-\lambda + 1 + \cfrac{2}{-\lambda + 2 + \cfrac{3}{-\lambda + 3 + \text{etc.}}}}$$

quae ergo fractio continua si continuetur usque ad ipsam formu
positam S, inde elici poterit valor ipsius S, id quod pro singulis
ostendemus.

14. Sit igitur $n = 2$, et forma fractionis continuae retro continu

$$-1 + \frac{1}{0 - S},$$

quae ergo nihilo aequata dabit $S = 1$, ut ante invenimus. Pro casu
orietur haec aequatio:

$$0 = -2 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{2}{0 + S}}$$

unde fit

$$2 = \cfrac{1}{-1 + \cfrac{2}{S}}$$

ideoque $S = \frac{4}{3}$, ut ante. Pro casu $n = 4$ habebimus

$$0 = -3 + \cfrac{1}{-2 + \cfrac{2}{-1 + \cfrac{3}{0 + S}}}$$

unde fit $S = \frac{21}{13}$. Hic autem calculus expeditius instituetur, si litter
introductis α, β, γ utamur; tum enim erit $0 = -3 + \gamma$. Erat autem

$$\alpha = \frac{3}{S}, \quad \beta = \frac{2}{-1 + \alpha}, \quad \gamma = \frac{1}{-2 + \beta}.$$

Hic ergo erit

$$\gamma = 3 \quad \text{ideoque} \quad 3 = \frac{1}{-2 + \beta},$$

unde fit

$$\beta = \frac{7}{3} = \frac{2}{-1 + \alpha}$$

hincque colligitur

$$\alpha = \frac{13}{7} = \frac{3}{S},$$

sicque tandem erit $S = \frac{21}{13}$. Hoc ergo artificio etiam in sequentibus

15. Quo has operationes pro maioribus numeris n sublevemus,
mulis pro litteris α, β, γ, δ etc. ante assumtis derivemus reciprocas,
quaelibet littera per praecedentem definiatur, quas utrasque formulas
quenti tabella exhibeamus:

$\beta = \dfrac{n-2}{-1+\alpha}$	$\alpha = 1 + \dfrac{n-2}{\beta}$
$\gamma = \dfrac{n-3}{-2+\beta}$	$\beta = 2 + \dfrac{n-3}{\gamma}$
$\delta = \dfrac{n-4}{-3+\gamma}$	$\gamma = 3 + \dfrac{n-4}{\delta}$
$\varepsilon = \dfrac{n-5}{-4+\delta}$	$\delta = 4 + \dfrac{n-5}{\varepsilon}$
$\zeta = \dfrac{n-6}{-5+\varepsilon}$	$\varepsilon = 5 + \dfrac{n-6}{\zeta}$
	$\zeta = 6 + \dfrac{n-7}{\eta}$

16. Iam beneficio huius tabulae facile erit omnes casus (

Ac primo quidem sumto $n = 1$, quo casu fit

$$S = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \text{etc.}}}}$$

videtur fieri $S = 0$, cum tamen supra invenimus esse $S = \frac{1}{e-1}$.
notetur istam conclusionem non valere, si etiam fuerit $\alpha = 0$,
$S = 0 + \frac{0}{0}$. Nihil vero repugnat, quominus sit $\frac{0}{0} = \frac{1}{e-1}$, qua
hoc casu locum habet.

Progrediamur ergo ad reliquos casus; ac sumto $n = 2$, ub

$$S = \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{2 + \text{etc.}}}$$

quia hic β non est $= 0$, manifesto erit $\alpha = 1$ hincque $S = 1$,
invenimus.

Sit iam $n = 3$ ideoque

$$S = \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{5}{3 + \text{etc.}}}}$$

erit $\beta = 2$, quia non est $\gamma = 0$; hinc ergo regrediendo erit

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad S = \frac{4}{3}.$$

Sumto porro $n = 4$, quo casu erit

$$S = \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{2 + \cfrac{6}{3 + \text{etc.}}}}$$

erit $\gamma = 3$, unde oriuntur sequentes valores:

$$\beta = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3},$$

$$\alpha = 1 + \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{13}{7}$$

et

$$S = \frac{21}{13}.$$

Sit $n = 5$, quo casu fit

$$S = \cfrac{5}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{7}{3 + \cfrac{8}{4 + \text{etc.}}}}}$$

tum erit $\delta = 4$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\gamma = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4},$$

$$\beta = 2 + \frac{2 \cdot 4}{13} = \frac{34}{13},$$

$$\alpha = 1 + \frac{3 \cdot 13}{34} = \frac{73}{34}$$

et

$$S = 0 + \frac{4 \cdot 34}{73} = \frac{136}{73}.$$

17. Nunc ulterius progrediamur ac ponamus $n = 6$, q

$$S = \cfrac{6}{1 + \cfrac{7}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}$$

eritque $\varepsilon = 5$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\delta = 4 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5},$$

$$\gamma = 3 + \frac{2 \cdot 5}{21} = \frac{73}{21},$$

$$\beta = 2 + \frac{3 \cdot 21}{73} = \frac{209}{73},$$

$$\alpha = 1 + \frac{4 \cdot 73}{209} = \frac{501}{209},$$

$$S = 0 + \frac{5 \cdot 209}{501} = \frac{1045}{501}.$$

18. Sit nunc $n = 7$ et

$$S = \cfrac{7}{1 + \cfrac{8}{2 + \cfrac{9}{3 + \cfrac{10}{4 + \text{etc.}}}}}$$

erit $\zeta = 6$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\varepsilon = 5 + \frac{1}{6} = \frac{31}{6},$$

$$\delta = 4 + \frac{2 \cdot 6}{31} = \frac{136}{31},$$

$$\gamma = 3 + \frac{3 \cdot 31}{136} = \frac{501}{136},$$

$$\beta = 2 + \frac{4 \cdot 136}{501} = \frac{1546}{501},$$

$$\alpha = 1 + \frac{5 \cdot 501}{1546} = \frac{4051}{1546},$$

$$S = 0 + \frac{6 \cdot 1546}{4051} = \frac{9276}{4051}.$$

19. Sit nunc $n = 8$ et

$$S = \cfrac{8}{1 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{10}{3 + \text{etc.}}}}$$

tum erit $\eta = 7$, unde sequentes oriuntur valores:

$$\begin{aligned}
\zeta &= 6 + \frac{1}{7} &&= \frac{43}{7}, \\
\varepsilon &= 5 + \frac{2 \cdot 7}{43} &&= \frac{229}{43}, \\
\delta &= 4 + \frac{3 \cdot 43}{229} &&= \frac{1045}{229}, \\
\gamma &= 3 + \frac{4 \cdot 229}{1045} &&= \frac{4051}{1045}, \\
\beta &= 2 + \frac{5 \cdot 1045}{4051} &&= \frac{13327}{4051}, \\
\alpha &= 1 + \frac{6 \cdot 4051}{13327} &&= \frac{37633}{13327}, \\
S &= 0 + \frac{7 \cdot 13327}{37633} &&= \frac{93289}{37633}.
\end{aligned}$$

20. Hos iam valores pro littera S inventos in ordinem disponamus eorum progressio facilius considerari possit, quos ergo sequenti modo re sentemus:

n	2	3	4	5	6	7	8	etc.
S	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{136}{73}$	$\frac{1045}{501}$	$\frac{9276}{4051}$	$\frac{93289}{37633}$	etc.

Inter has autem fractiones primo intuitu nulla certa lex regnare vi verum re attentius perpensa haud difficulter quandam progressionis observare licet. Si enim quemlibet numeratorem cum summa numerato

$$
\begin{aligned}
21 &= 3\ \ (4 + \ \ 3) = 3 \cdot \ \ 7 \\
136 &= 4\ \ (21 + \ \ 13) = 4 \cdot \ \ 34 \\
1045 &= 5\ \ (136 + \ \ 73) = 5 \cdot \ \ 209 \\
9276 &= 6\,(1045 + \ \ 501) = 6 \cdot \ \ 1546 \\
93289 &= 7\,(9276 + 4051) = 7 \cdot 13327
\end{aligned}
$$

etc.

Pro denominatoribus autem haud absimilis relatio libet sit summa praecedentis numeratoris certo multip qui ordo sequenti modo in oculos incurret:

$$
\begin{aligned}
3 &= \ \ 1 + 2 \cdot \ \ 1 = \ \ 1 + \\
13 &= \ \ 4 + 3 \cdot \ \ 3 = \ \ 4 + \\
73 &= \ \ 21 + 4 \cdot \ \ 13 = \ \ 21 + \\
501 &= \ \ 136 + 5 \cdot \ \ 73 = \ \ 136 + \ \ 3 \\
4051 &= 1045 + 6 \cdot \ \ 501 = 1045 + \ \ 30 \\
37633 &= 9276 + 7 \cdot 4051 = 9276 + 28
\end{aligned}
$$

etc.

21. Hinc ergo, si pro quolibet numero n inventa

$$S = \frac{p}{q},$$

pro sequente numero, $n+1$, fiet

$$S = \frac{n(p+q)}{p+nq},$$

cuius formulae ope ex quolibet casu sequens multo exp quam per praecedentem methodum. Ita cum pro casu valor

$$S = \frac{93289}{37633},$$

sequente casu $n = 9$ erit

$$S = \frac{8(93289 + 37633)}{93289 + 8 \cdot 37633} = \frac{1047376}{394353}.$$

m quia haec eximia regula hactenus sola inductione innititur, eius demon-
ionem in sequente articulo dabimus. Ante autem quam hoc argumentum
amus, observasse iuvabit posteriorem columnam tabulae (§ 15) datae
insignem novam proprietatem suppeditare. Si enim loco litterarum
γ etc. earum valores successive substituamus, pro S novam fractionem
nuam nanciscemur, quae ita se habet:

$$S = \cfrac{n-1}{1 + \cfrac{n-2}{2 + \cfrac{n-3}{3 + \cfrac{n-4}{4 + \cfrac{n-5}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

forma semper abrumpitur, unde operae pretium erit hanc transforma-
m in sequenti theoremate ante oculos posuisse.

THEOREMA

22. *Si fuerit*

$$S = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \cfrac{n+3}{4 + etc.}}}}$$

etiam semper

$$S = \cfrac{n-1}{1 + \cfrac{n-2}{2 + \cfrac{n-3}{3 + \cfrac{n-4}{4 + \cfrac{n-5}{5 + etc.}}}}}$$

dem n fuerit numerus integer positivus, excepta unitate ob rationem supra tam.

23. Si evolutiones casuum ante tractatorum contemplem
mus in fractionibus pro litteris α, β, γ etc. datis inverso
numeratorem dare denominatorem sequentis; quamobrem omnes
disponamus ac differentias tam primas quam secundas et se
mus. Ita pro casu $n = 3$ termini harum fractionum ab u
erunt sequentes:

	1,	2,	3,	4,
D. I.	1,	1,	1.	

Simili modo pro $n = 4$ habebimus hos terminos:

	1,	3,	7,	13,	21,
D. I.	2,	4,	6,	8,	
D. II.	2,	2,	2.		

Casus vero $n = 5$ praebet sequens schema:

	1,	4,	13,	34,	73,	136,
D. I.	3,	9,	21,	39,	63,	
D. II.	6,	12,	18,	24,		
D. III.	6,	6,	6.			

Casus porro $n = 6$ dat sequens schema:

	1,	5,	21,	73,	209,	501,	1045,
D. I.	4,	16,	52,	136,	292,	544,	
D. II.	12,	36,	84,	156,	252,		
D. III.	24,	48,	72,	96,			
D. IV.	24,	24,	24.				

casu $n = 7$ habebimus

$$\begin{array}{llllllllll}
 & 1, & 6, & 31, & 136, & 501, & 1546, & 4051, & 9276, \\
\text{D. I.} & & 5, & 25, & 105, & 365, & 1045, & 2505, & 5225, \\
\text{D. II.} & & & 20, & 80, & 260, & 680, & 1460, & 2720, \\
\text{D. III.} & & & & 60, & 180, & 420, & 780, & 1260, \\
\text{D. IV.} & & & & & 120, & 240, & 360, & 480, \\
\text{D. V.} & & & & & & 120, & 120, & 120.
\end{array}$$

s denique $n = 8$ dat sequens schema:

$$\begin{array}{llllllllll}
 & 1, & 7, & 43, & 229, & 1045, & 4051, & 13327, & 37633, & 93289, \\
\text{D. I.} & & 6, & 36, & 186, & 816, & 3006, & 9276, & 24306, & 55656, \\
\text{D. II.} & & & 30, & 150, & 630, & 2190, & 6270, & 15030, & 31350, \\
\text{D. III.} & & & & 120, & 480, & 1560, & 4080, & 8760, & 16320, \\
\text{D. IV.} & & & & & 360, & 1080, & 2520, & 4680, & 7560, \\
\text{D. V.} & & & & & & 720, & 1440, & 2160, & 2880, \\
\text{D. VI.} & & & & & & & 720, & 720, & 720.
\end{array}$$

24. Consideratio horum casuum nobis sequentes conclusiones suppeditat:

1°. Quia omnes hi casus tandem ad differentias constantes perducunt, discimus omnes istas series esse algebraicas, quarum scilicet terminus ralis algebraice exhiberi queat.

2°. Porro etiam videmus differentias constantes constituere progressionem rgeometricam, scilicet

$$1, \quad 2, \quad 6, \quad 24, \quad 120, \quad 720 \text{ etc.}$$

3°. Constat autem terminos generales cuiusque progressionis ex terminis is singularum differentiarum formari, qui ergo termini primi se habent equens tabella indicat:

$$\begin{array}{lllllllll}
n=5 & 1, & 3, & 6, & 6, & & & \\
n=6 & 1, & 4, & 12, & 24, & 24, & & \\
n=7 & 1, & 5, & 20, & 60, & 120, & 120, & \\
n=8 & 1, & 6, & 30, & 120, & 360, & 720, & 720,
\end{array}$$

etc.

Evidens autem est hanc postremam seriem hoc modo repr

$$1, \quad 6, \quad 6\cdot 5, \quad 6\cdot 5\cdot 4, \quad 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3, \quad 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2,$$

4°. Cum ista progressio referatur ad casum $n=8$, hi
licet in genere terminos primos tam ipsius seriei quam ipsa
hanc constituturos esse progressionem:

$$1, \quad n-2, \quad (n-2)(n-3), \quad (n-2)(n-3)(n$$

5°. Deinde vero ex doctrina progressionum constat te
cuiusque seriei reperiri, si, manente termino ipsius seriei
differentiarum terminus primus multiplicetur per x, secun
rentiarum per $\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}$, tertiarum per $\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ et ita por
generalis pro nostro casu hoc modo exprimetur:

$$1+(n-2)x+(n-2)(n-3)\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+(n-2)(n-3)(n-4)\frac{x(}{}$$

unde sumto $x=1$ oritur terminus secundus $n-1$; at si
numeri 2, 3, 4 etc., orientur termini tertius, quartus, quint
autem haec pro singulis casibus evolvere.

25. Hinc ergo si fuerit $n=2$, terminus generalis erit
terminus generalis erit $1+x$. Hoc autem casu ipsa seri
ubi patet sumto $x=3$ prodire terminum ultimum 4, qui

divisus dat valorem ipsius $S = \frac{4}{3}$. Sumatur nunc $n = 4$; et seriei 1, 3
21 erit terminus generalis

$$= 1 + 2x + x(x-1) = 1 + x + xx,$$

unde sumto $x = 4$ prodit terminus ultimus $= 21$, qui per praecedent
divisus dat $S = \frac{21}{13}$. Sit nunc $n = 5$; et progressionis 1, 4, 13, 34,
terminus generalis erit

$$1 + 3x + 3 \cdot 2 \cdot \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

unde sumto $x = 5$ oritur ultimus terminus 136, qui per penultimum
dat valorem ipsius S. Simili modo sumto $n = 6$, seriei 1, 5, 21, 73, 2
1045 terminus generalis erit

$$1 + 4x + 4 \cdot 3 \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot}$$

qui posito $x = 6$ praebet terminum ultimum at posito $x = 5$ penul
quorum ille per hunc divisus praebet valorem ipsius S.

26. Quoniam autem hic tantum agitur de termino ultimo et pe
horum terminorum formam pro casu $n = 6$ accuratius perpendamus.
igitur $x = 5$ erit terminus penultimus

$$1 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

at sumto $x = 6$ habebitur terminus ultimus

$$1 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

unde, si pro hoc casu ponatur $S = \frac{p}{q}$ et denominatores ad priores
referantur, erit

$$p = 1 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3.$$

ubi evidens est coëfficientes priores ex potestate quarta binom

27. In omnibus igitur casibus optimo successu coëfficien bus uti potuerimus et, quoniam pro valore generali n coëfficien $n-2$ sunt desumendi, meminisse iuvabit me olim[1] hos coëffi modo expressisse:

$$\left[\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right], \quad \left[\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix}\right], \quad \left[\begin{matrix} n-2 \\ 3 \end{matrix}\right], \quad \left[\begin{matrix} n-2 \\ 4 \end{matrix}\right] \quad \text{etc.}$$

Si ponamus, ut hactenus, $S = \frac{p}{q}$, erit

$$p = 1 + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right] n + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix}\right] n(n-1) + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 3 \end{matrix}\right] n(n-1)$$

$$+ \left[\begin{matrix} n-2 \\ 4 \end{matrix}\right] n(n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}$$

et

$$q = 1 + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 1 \end{matrix}\right] (n-1) + \left[\begin{matrix} n-2 \\ 2 \end{matrix}\right] (n-1)(n-2)$$

$$+ \left[\begin{matrix} n-2 \\ 3 \end{matrix}\right] (n-1)(n-2)(n-3) + \text{etc.}$$

Ita si fuerit $n = 7$, erit hinc

$$p = 1 + 5 \cdot 7 + 10 \cdot 7 \cdot 6 + 10 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 7 \cdot$$

et

$$q = 1 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 6 \cdot 5 + 10 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot$$

Tales igitur expressiones ad quosvis casus facile applicantur.

1) Confer Commentationem 575; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I 15, Notandum est singulas Commentationes in designandi modo inter se differre. V p. 3 voluminis I 15 adiectam. C. B.

28. Quodsi iam istae formulae pro p et q inventae accuratius perpendantur et cum sequente casu $n+1$, pro quo sit $S=\frac{p'}{q'}$ ideoque

$$p' = 1+\left[\frac{n-1}{1}\right](n+1)+\left[\frac{n-1}{2}\right](n+1)n+\left[\frac{n-1}{3}\right](n+1)n(n-1)+\text{etc.}$$

et

$$q'=1+\left[\frac{n-1}{1}\right]n+\left[\frac{n-1}{2}\right]n(n-1)+\left[\frac{n-1}{3}\right]n(n-1)(n-2)+\text{etc.}$$

comparentur, haud difficulter inde deduci poterit insignis illa relatio, quam iam ante [§ 21] in medium attulimus, scilicet semper esse

$$p' = np + nq$$

et

$$q' = p + nq,$$

quae proprietas eo magis est notatu digna, quod eius ope ex quolibet casu sequens facillime derivari potest, quemadmodum iam in praecedente articulo est ostensum.

DE SERIE MAXIME MEMORABILI Q
BINOMIALIS QUAECUNQUE EXPR

Conventui exhibita die 20. Decembris 177

Commentatio 743 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 4 (18

1. Memini me olim vidisse seriem prorsus sin binomiali $(1+x)^n$, quae abrumpebatur pro casibus, tam numerus integer positivus quam negativus. Quia amplius recordabar, eam sequenti modo sum perscru abrumpi debet, sive n fuerit numerus integer positiv sub hac forma repraesento:

$$(1+x)^n = A + nB + n(n-1)C + (n+1)$$

$$+ (n+1)n(n-1)(n-2)E + (n+2)\cdots(n-2)F + (n$$

2. Hac forma generali constituta litteras A, B minemus, ut casibus, quibus pro n numerus integer si tivus assumitur, satisfiat; unde casus simpliciores sequen

Si $n = 0$, erit $\quad 1 \quad = A,$

Si $n = 1$, erit $\quad 1 + x = A + B,$

Si $n = -1$, erit $\quad \frac{1}{1+x} = A - B + 2C,$

Si $n = 2$, erit $\quad (1+x)^2 = A + 2B + 2C + 6D,$

Si $n = -2$, erit $\quad \frac{1}{(1+x)^2} = A - 2B + 6C - 6D +$

Si $n = 3$, erit $(1+x)^3 = A + 3B + 6C + 24D + 24E + 120F$,

Si $n = -3$, erit $\frac{1}{(1+x)^3} = A - 3B + 12C - 24D + 120E - 120F + 720$

Si $n = 4$, erit $(1+x)^4 = A + 4B + 12C + 60D + 120E + 720F + 720$

$$+ 5040H,$$

Si $n = -4$, erit $\frac{1}{(1+x)^4} = A - 4B + 20C - 60D + 360E - 720F + 5040$

$$- 5040H + 40320I$$

etc.

3. Iam resolutio harum aequationum pro litteris A, B, C, D etc.
quentes nobis praebet valores:

$$\begin{aligned}
&1. & A &= 1,\\
&2. & B &= x,\\
&3. & 2C &= \frac{xx}{1+x},\\
&4. & 6D &= \frac{x^3}{1+x},\\
&5. & 24E &= \frac{x^4}{(1+x)^2},\\
&6. & 120F &= \frac{x^5}{(1+x)^2},\\
&7. & 720G &= \frac{x^6}{(1+x)^3}
\end{aligned}$$

etc.

4. Lex, qua hi valores ordine progrediuntur, satis est manifesta,
quilibet terminus prodit, si praecedens vel per x vel per $\frac{x}{1+x}$ multiplice
Quo observato series quaesita sequenti forma expressa reperietur:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{xx}{1+x} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{1+x}\\
+ \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdots 4}\frac{x^4}{(1+x)^2} + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}\frac{x^5}{(1+x)^2}\\
+ \frac{(n+2)\cdots(n-3)}{1\cdots 6}\frac{x^6}{(1+x)^3} + \text{etc.};
\end{aligned}$$

et distinguamus terminos ordine pares ab imparibus, ut serien
obtineamus, eritque

$$(1+x)^n = \begin{cases} 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} z^2 + \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdots 4} z^4 + \frac{(n+2)\cdots(n \cdots}{1\cdots 6} \\ + x\left(n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} z^2 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5} z^4 + \mathrm{e}\cdots\right. \end{cases}$$

atque ob insignem ordinem, quo termini utriusque seriei procedu
tuto concludere licet, eas esse veritati consentaneas. Quoniam v
per solam inductionem est conclusa, utique rigidiore demonstra
quam iam sum investigaturus.

5. Interim tamen statim casus memorabilis se offert, quo
seriei egregie confirmatur, scilicet si exponens n statuatur infi
simul vero x infinite parvum, ita tamen ut productum nx sit qu
puta u; tum enim constat esse

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u.$$

Hoc autem casu series inventa sequentem induet formam:

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1\cdot 2} + \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.},$$

quae series, ut cuique constat, veritati est consentanea.

6. Ut autem in demonstrationem completam inquiramus, q

$$\frac{xx}{1+x} = zz,$$

$$x = \frac{zz + z\sqrt{zz+4}}{2}.$$

hanc fractionem tollendam statuamus $z = 2y$, ut fiat

$$x = 2yy + 2y\sqrt{yy+1},$$

cque fit

$$1 + x = 1 + 2yy + 2y\sqrt{yy+1} = (y + \sqrt{1+yy})^2,$$

ut potestas nostra proposita evadat

$$(y + \sqrt{1+yy})^{2n}.$$

igitur ista formula $y + \sqrt{1+yy}$ frequentissime occurret, brevitatis gratia amus

$$y + \sqrt{1+yy} = v,$$

potestas evolvenda sit v^{2n}.

7. Cum igitur ista potestas v^{2n} aequetur binis seriebus supra exhibitis, priore statuamus

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}zz + \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdots 4}z^4 + \frac{(n+2)\cdots(n-3)}{1\cdots 6}z^6 + \text{etc.},$$

altera vero statuamus

$$\frac{tx}{z} = nx + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}xz^2 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}xz^4 + \text{etc.},$$

fiat

$$t = nz + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}z^5 + \text{etc.},$$

e series praecedenti magis est assimilata. Hinc igitur habebimus

$$v^{2n} = s + \frac{tx}{z}.$$

$$x = 2yy + 2y\sqrt{1+yy} = 2yv,$$

habebimus

$$\frac{x}{z} = v,$$

et aequatio nostra iam erit

$$v^{2n} = s + tv.$$

Ut nunc hanc aequationem per differentiationem tractemus,

$$\partial v = \partial y + \frac{y\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{v\partial y}{\sqrt{1+yy}}.$$

Vicissim autem y per v ita exprimitur, ut sit

$$y = \frac{vv-1}{2v}$$

hincque porro

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v}.$$

Tum vero differentiando erit

$$\partial y = \frac{\partial v(vv+1)}{2vv},$$

qui valor egregie convenit cum eo, quem praecedens formu
praeberet, unde fit

$$\partial y = \frac{\partial v}{v}\sqrt{1+yy} = \frac{\partial v(vv+1)}{2vv}.$$

9. Cum iam potestas nostra v^{2n} aequetur duabus serieb
teram per s alteram per tv denotavimus, notasse hic iuvabit
s, complecti terminos rationales, alteram vero terminos omne
rationales. Hoc observato aequationis inventae primo sumam
ut habeamus

$$2nlv = l(s+tv),$$

umtis differentialibus erit

$$\frac{2n\partial v}{v}=\frac{\partial s+v\partial t+t\partial v}{s+tv}.$$

autem sit

$$v=y+\sqrt{1+yy}$$

$$\partial v=\frac{v\partial y}{\sqrt{1+yy}},$$

hac substitutione orietur haec aequatio:

$$\frac{2n\partial y}{\sqrt{1+yy}}=\frac{\partial s\sqrt{1+yy}+y\partial t\sqrt{1+yy}+\partial t(1+yy)+ty\partial y+t\partial y\sqrt{1+yy}}{(s+ty+t\sqrt{1+yy})\sqrt{1+yy}},$$

sublatis fractionibus hanc induet formam:

$$2ns\partial y+2nty\partial y+2nt\partial y\sqrt{1+yy}$$

$$=\partial s\sqrt{1+yy}+y\partial t\sqrt{1+yy}+\partial t(1+yy)+ty\partial y+t\partial y\sqrt{1+yy},$$

seorsim aequando partes rationales et irrationales nascuntur hae duae ationes:

$$\text{I.}\quad 2ns\partial y+(2n-1)ty\partial y=\partial t+yy\partial t,$$

$$\text{II.}\quad (2n-1)t\partial y=\partial s+y\partial t.$$

10. Ut harum aequationum prior simplicior reddatur, ab ea subtrahatur erior per y multiplicata, eiusque loco prodibit ista:

$$2ns\partial y=\partial t-y\partial s.$$

ra aequatio cum hac combinanda erit

$$(2n-1)t\partial y=\partial s+y\partial t.$$

videamus, an ex his duabus aequationibus pro litteris s et t easdem s derivare queamus, quas supra per inductionem elicuimus. Quoniam

$$(2n-1)t\partial z = 2\partial s + z\partial t,$$
$$2ns\partial z = 2\partial t - z\partial s.$$

11. Possemus nunc ex his duabus aequationibus olimina
quo facto prodiret aequatio differentialis secundi gradus in
haud difficulter series valorem ipsius s exprimens deduci poss
modo eliminata littera s talis aequatio prodiret inter t et
modo series pro t derivari posset; verum multo facilius a
immediate ex binis aequationibus inventis erui poterunt. Pr
littera statim fingamus sequentes series indefinitas:

$$s = 1 + Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + Ez^{10} + \text{etc.},$$
$$t = \alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 + \delta z^7 + \varepsilon z^9 + \text{etc.}$$

12. Nunc istas series substituamus primo in aequatione

$$(2n-1)t - \frac{z\partial t}{\partial z} - \frac{2\partial s}{\partial z} = 0$$

sequenti modo:

$$\begin{aligned}
(2n-1)t &= (2n-1)\alpha z + (2n-1)\beta z^3 + (2n-1)\gamma z^5 + (2n - \\
-\frac{z\partial t}{\partial z} &= \quad -\alpha \qquad\qquad -3\beta \qquad\qquad -5\gamma \qquad\qquad - \\
-\frac{2\partial s}{\partial z} &= \quad -4A \qquad\quad -8B \qquad\quad -12C \qquad\quad -
\end{aligned}$$

Hic iam singulis partibus seorsim ad nihilum redactis obtiner
determinationes:

$$A = \frac{n-1}{2}\alpha, \qquad B = \frac{n-2}{4}\beta, \qquad C = \frac{n-3}{6}\gamma,$$
$$D = \frac{n-4}{8}\delta, \qquad E = \frac{n-5}{10}\varepsilon, \qquad F = \frac{n-6}{12}\zeta$$

etc.

13. Eodem modo tractetur altera aequatio,

$$2ns + \frac{z\,\partial s}{\partial z} - \frac{2\,\partial t}{\partial z} = 0,$$

acta substitutione serierum fictarum supra datarum fiet

$$\begin{aligned}
2ns &= \quad 2n + 2nAz^2 + 2nBz^4 + 2nCz^6 + 2nDz^8 + \text{etc.},\\
+\frac{z\,\partial s}{\partial z} &= \qquad\quad + \;\; 2A \;\; + \;\; 4B \;\; + \;\; 6C \;\; + \;\; 8D \;\; + \text{etc.},\\
-\frac{2\,\partial t}{\partial z} &= -2\alpha - \;\; 6\beta \;\; - 10\gamma \;\; - 14\delta \;\; - 18\varepsilon \;\; - \text{etc.}
\end{aligned}$$

quo ergo fluunt sequentes determinationes:

$$\alpha = n, \qquad \beta = \frac{n+1}{3}A, \qquad \gamma = \frac{n+2}{5}B,$$

$$\delta = \frac{n+3}{7}C, \qquad \varepsilon = \frac{n+4}{9}D, \qquad \zeta = \frac{n+5}{11}E$$

etc.

14. Cum nunc litterarum graecarum prima $\alpha = n$ sit cognita, alternatim superiores determinationes consulendo sequentes valores reperientur:

$$\alpha = n, \qquad A = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\beta = \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}, \qquad B = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$\gamma = \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdots 5}, \qquad C = \frac{(n+2)\cdots(n-3)}{1\cdots 6},$$

$$\delta = \frac{(n+3)\cdots(n-3)}{1\cdots 7} \qquad D = \frac{(n+3)\cdots(n-4)}{1\cdots 8}$$

etc. etc.

onstratum igitur nunc est legem progressionis, quam supra quasi divi-
o attulimus, cum veritate perfecte consentire.

15. Cum igitur hic

$$(1+x)^n = v^{2n} = s + t\frac{x}{z},$$

quaestio hic omni attentione digna occurrit, quinam prodituri si pro utraque littera s et t seorsim sumta, quam investigationem in problemate sum suscepturus.

PROBLEMA

Propositis his duabus seriebus:

$$s = 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{(n+1)\cdots(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^4 + etc.,$$

$$t = \frac{n}{1}z + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \frac{(n+2)\cdots(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}z^5 + etc.$$

investigare utriusque summam.

SOLUTIO

16. Determinatio harum duarum summarum repetenda est aequationibus differentialibus supra inventis, dum loco z et ∂z s et $2\partial y$:

$$(2n-1)t\partial y = \partial s + y\partial t,$$

$$2ns\partial y = \partial t - y\partial s.$$

Hic quidem iterum posset alterutra litterarum s et t eliminari, perveniretur ad aequationem differentialem secundi gradus; verum labore supersedere poterimus. Utamur scilicet tantum aequatione forma relata:

$$\partial s = 2nt\partial y - \partial\cdot ty,$$

cum qua combinemus aequationem principalem

$$v^{2n} = s + tv,$$

fit

$$s = v^{2n} - tv$$

que

$$\partial s = 2nv^{2n-1}\,\partial v - \partial \cdot tv = 2nt\,\partial y - \partial \cdot ty.$$

vero

$$\partial \cdot tv - \partial \cdot ty = \partial \cdot t(v - y) = \partial \cdot t\sqrt{1 + yy}$$

$$v = y + \sqrt{1 + yy}.$$

uc habebimus

$$2nv^{2n-1}\,\partial v = 2nt\,\partial y + \partial t\sqrt{1 + yy} + \frac{ty\,\partial y}{\sqrt{1 + yy}},$$

aequatio per $\sqrt{1 + yy}$ divisa dat

$$\partial t + \frac{ty\,\partial y}{1 + yy} + 2nt\frac{\partial y}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{2nv^{2n-1}\,\partial v}{\sqrt{1 + yy}}.$$

vero est

$$\frac{\partial y}{\sqrt{1 + yy}} = \frac{\partial v}{v},$$

atio nostra erit

$$\partial t + \frac{ty\,\partial y}{1 + yy} + 2nt\frac{\partial v}{v} = \frac{2nv^{2n-1}\,\partial v}{\sqrt{1 + yy}},$$

multiplicata per $v^{2n}\sqrt{1 + yy}$ reddet membrum sinistrum integrabile, eritque

$$\partial \cdot tv^{2n}\sqrt{1 + yy} = 2nv^{4n-1}\,\partial v,$$

ergo integrale erit

$$tv^{2n}\sqrt{1 + yy} = \frac{1}{2}v^{4n} + \frac{C}{2},$$

equenter habebimus

$$t = \frac{v^{2n} + Cv^{-2n}}{2\sqrt{1 + yy}}.$$

17. Iam pro constante C, quia casu $y = 0$ et $v = 1$ fieri debet $t = 0$, $C = -1$, ita ut sit

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1 + yy}},$$

supra autem vidimus esse

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v},$$

quo substituto reperietur

$$s = \frac{v^{2n} + v^{2-2n}}{vv+1}.$$

Interim tamen etiam videamus, quomodo aequationem differentia memoratam tractari oporteat.

ALIA SOLUTIO
EX DIFFERENTIALIBUS SECUNDI GRADUS PETITA

18. Cum nostrae binae aequationes differentiales sint

$$\partial s = 2nt\partial y - \partial \cdot ty,$$

$$\partial t = 2ns\partial y + y\partial s,$$

erit ex priore

$$s = 2n\int t\partial y - ty,$$

quibus valoribus in altera substitutis fiet

$$\partial t = 4nn\partial y\int t\partial y - y\partial \cdot ty,$$

quae evoluta dat

$$\partial t = 4nn\partial y\int t\partial y - ty\partial y - yy\partial t.$$

19. Ut hinc signum summatorium tollamus, statuamus

$$\int t\partial y = u,$$

ut sit

$$t = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \partial t = \frac{\partial\partial u}{\partial y},$$

us valoribus substitutis prodit

$$\frac{\partial\partial u}{\partial y}(1+yy)+y\partial u=4nnu\partial y,$$

n aequationem ponendo

$$u=e^{\int p\partial y}$$

$$\partial u=p\partial y e^{\int p\partial y}$$

$$\partial\partial u=(\partial p\partial y+pp\partial y\partial y)e^{\int p\partial y}$$

ifferentialia prima reducere licet; erit enim

$$(\partial p+pp\partial y)(1+yy)+py\partial y=4nn\partial y$$

$$\partial p+pp\partial y+\frac{py\partial y}{1+yy}=4nn\frac{\partial y}{1+yy}.$$

20. Ut nunc primum terminum et tertium in unum contrahamus, ponamus

$$p=\frac{q}{\sqrt{1+yy}},$$

ue aequatio

$$\frac{\partial q}{\sqrt{1+yy}}+\frac{qq\partial y}{1+yy}=4nn\frac{\partial y}{1+yy}$$

$$\frac{\partial q}{\sqrt{1+yy}}=\frac{(4nn-qq)\partial y}{1+yy},$$

commode separationem admittit; evidens enim est prodire

$$\frac{\partial q}{4nn-qq}=\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}},$$

aequatio per $4n$ multiplicata et integrata dat

$$l\frac{2n+q}{2n-q}=4n\int\frac{\partial y}{\sqrt{1+yy}}=$$

$$\qquad Cv^{4n}+1$$

21. Hinc igitur ob

$$p = \frac{q}{\sqrt{1+yy}}$$

erit

$$p\partial y = \frac{q\partial y}{\sqrt{1+yy}} = \frac{q\partial v}{v}$$

ideoque

$$p\partial y = \frac{2n(Cv^{4n}-1)\partial v}{v(Cv^{4n}+1)},$$

quae expressio resolvitur in has partes:

$$p\partial y = -\frac{2n\partial v}{v} + \frac{4nCv^{4n-1}\partial v}{Cv^{4n}+1},$$

cuius ergo integrale erit

$$\int p\partial y = -2nlv + l(Cv^{4n}+1) + lD$$

consequenter erit

$$e^{\int p\partial y} = \frac{D}{v^{2n}}(1+Cv^{4n}) = Dv^{-2n} + CDv^{+2n}$$

22. Cum igitur sit

$$u = \int t\partial y \quad \text{ideoque} \quad t = \frac{\partial u}{\partial y},$$

per differentiationem mutatis constantibus arbitrariis re

$$t = \frac{Ev^{-2n}+Fv^{+2n}}{\sqrt{1+yy}}.$$

Ad constantes autem definiendas primo notetur posito
debere $t=0$, unde fit

$$F = -E,$$

ut iam sit

$$t = \frac{E}{\sqrt{1+yy}}(v^{-2n} - v^{+2n}).$$

inde vero si y fuerit infinite parvum, fieri debet

$$t = nz = 2ny,$$

n vero evadit

$$v = 1 + y \quad \text{et} \quad v^{-1} = 1 - y$$

eoque

$$v^{2n} = 1 + 2ny \quad \text{et} \quad v^{-2n} = 1 - 2ny,$$

quibus valoribus fiet

$$2ny = -4nEy, \quad \text{ergo} \quad E = -\frac{1}{2},$$

que nanciscimur pro t eundem valorem ac supra invenimus, scilicet

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}},$$

quo porro ut ante derivatur

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

SOLUTIO FACILLIMA PROBLEMATIS

23. Hanc solutionem derivabimus ex sola aequatione

$$v^{2n} = s + tv,$$

qua ob

$$v = y + \sqrt{1+yy}$$

tera s complectitur potestates pares ipsius y, t vero impares. Sumto igitur negative littera s manet eadem, littera t vero abibit in $-t$; tum autem co v habebimus

$$-y + \sqrt{1+yy} = v^{-1}.$$

$$v^{-2n} = s - \frac{t}{v},$$

qua aequatione cum principali $v^{2n} = s + tv$ coniuncta, fi

$$v^{2n} - v^{-2n} = tv + \frac{t}{v},$$

unde fit

$$t = \frac{v^{2n} - v^{-2n}}{2\sqrt{1+yy}},$$

et hinc reperietur

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

Cum enim ex prima aequatione sit

$$t = v^{2n-1} - \frac{s}{v},$$

ex altera vero

$$-t = v^{1-2n} - vs,$$

hi valores invicem coaequati dabunt

$$\frac{s(vv+1)}{v} = v^{2n-1} + v^{1-2n},$$

unde ob

$$\frac{vv+1}{v} = 2\sqrt{1+yy}$$

erit

$$s = \frac{v^{2n-1} + v^{1-2n}}{2\sqrt{1+yy}}.$$

24. Transferamus denique haec omnia ad ipsam pote
cum sit

et

$$1 + x = vv$$

$$\sqrt{1+yy} = \frac{vv+1}{2v} = \frac{x+2}{2\sqrt{1+x}},$$

$$2\sqrt{1+yy} = \frac{x+2}{\sqrt{1+x}}.$$

...ribus substitutis fiet

$$s = \frac{\sqrt{1+x}}{x+2}\left((1+x)^{n-\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}-n}\right),$$

$$t = \frac{\sqrt{1+x}}{x+2}\left((1+x)^{n} - (1+x)^{-n}\right)$$

$$s = \frac{(1+x)^{n} + (1+x)^{1-n}}{x+2},$$

$$t = \frac{(1+x)^{n+\frac{1}{2}} - (1+x)^{\frac{1}{2}-n}}{x+2}.$$

...tera serie deducitur

$$\frac{tx}{y} = t\sqrt{1+x},$$

...ur seriei erit

$$\frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^{1-n}}{2+x},$$

...umma terminorum ordine parium in serie pro potestate $(1+x)^{n}$

DE FRACTIONIBUS CONTINUIS W

Conventui exhibuit die 7. Februarii 1780

Commentatio 745 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812)

1. Postquam BROUNCKERUS[2][3]) memorabilem suam fract
quadratura circuli invenisset eamque sine demonstratione
municasset, hic plurimum studii in eo collocavit, ut fon
KERUS hanc insignem formulam hausisset, detegeret. A
eum usum fuisse egregiis illis formulis, quas ipse in o
tica infinitorum eruerat. Quin etiam inde per calc
strusos non solum BROUNCKERI fractionem continuam, sed i
alias similes elicuit, quae utique, perinde ac BROUNCKERI o
iudicandae, ut oblivioni eripiantur.

2. Quae autem ex WALLISII Arithmetica infinit
ventam Analysin infinitorum in lucem edita, huc perti
quidem recepto ita repraesentari possunt, ut, formulis in
$x = 0$ usque ad $x = 1$ extensis, sequentes quadraturae ex

1) Confer hac cum dissertatione praeter *Introductionem in analysin i*
17, 123, 522, 593, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, vol. I8 p. 362; vol. I
p. 314 et 661. C. B.

2) Vide notam ad p. 189 vol. I14 adiectam. C. B.

3) Editio princeps hic et passim: BROUNKERUS. C. B.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx}} = 1 = 1,$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2}{3} = \frac{2\cdot 2}{2\cdot 3},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7},$$

$$\int \frac{x^9\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}$$

etc.

3. Istas formulas in tertia columna ita adornavi, ut denominatores inter-
ionem manifesto admittant; sicque tantum superest, ut etiam numera-
ita transformentur, ut pariter interpolationem patiantur, id quod fiet,
lis series secundum legem uniformem progrediens, scilicet A, B, C, D,
E etc. investigetur, ut sit

$$AB = 1\cdot 1, \quad BC = 2\cdot 2, \quad CD = 3\cdot 3, \quad DE = 4\cdot 4 \text{ etc.},$$

uod est id ipsum, in quo WALLISIUS summam ingenii sagacitatem mani-
vit, quam autem investigationem deinceps multo generalius et calculo
faciliori sum expediturus.

4. Hac autem serie litterarum A, B, C, D etc. inventa totum negotium
ue erit confectum. Cum enim sit, uti sequens tabula declarat:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-xx}} = 1 = \frac{1}{A}\cdot\frac{A}{1},$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{BC}{2\cdot 3} = \frac{1}{A}\cdot\frac{ABC}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{BCDE}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{A}\cdot\frac{ABCDE}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{BCDEFG}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{1}{A}\cdot\frac{ABCDEFG}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

etc.,

interpolatio nobis suppeditat sequentes quantitat

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A}\cdot 1,$$

$$\int \frac{xx\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A}\cdot\frac{AB}{1\cdot 2},$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A}\cdot\frac{ABCD}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{A}\cdot\frac{ABCDE}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

etc.

5. Cum nunc sit

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2}$$

denotante π peripheriam circuli, cuius diameter
gratia scribamus $q=\frac{\pi}{2}$, omnes litterarum A, B,
quantitatem q sequenti modo exprimentur:

		Diff
$A = \frac{1}{q}$	$= 0{,}636620$	
		0,9
$B = q$	$= 1{,}570796$	
		0,9
$C = \frac{4}{q}$	$= 2{,}546479$	
		0,9
$D = \frac{9q}{4}$	$= 3{,}534292$	
		0,9
$E = \frac{4\cdot 16}{9q}$	$= 4{,}527074$	
		0,9
$F = \frac{9\cdot 25}{4\cdot 16}q$	$= 5{,}522331$	

etc.

6. Hic tertiam adiunxi columnam, quae valor
rarum exhibet, quo clarius appareat, quemadmod

em uniformem increscant, quod non evenisset, si loco q valorem falsum cepissem. His expositis methodum multo faciliorem tradam, qua pro sin- lis his litteris fractiones continuae reperiri possunt, atque eadem opera hanc vestigationem multo generaliorem instituam, dum sequens problema sum soluturus.

PROBLEMA

Invenire seriem litterarum A, B, C, D etc. uniformi lege procedentem, ita sit

$$AB = ff, \quad BC = (f+a)^2, \quad CD = (f+2a)^2 \text{ etc.}$$

SOLUTIO

7. Hinc statim patet, qualis functio fuerit A ipsius f, talem esse debere functionem ipsius $f+a$, tum vero C ipsius $f+2a$, D ipsius $f+3a$ et porro. Hac lege observata si statuamus

$$A = f - \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}s}{A'},$$

ni debebit

$$B = f + \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}s}{B'},$$

i litterae A' et B' eandem inter se rationem tenere debent, ita ut ex A' iatur B', si loco f scribatur $f+a$. Cum igitur fractionibus sublatis sit

$$2A = 2f - a + \frac{s}{A'} \quad \text{et} \quad 2B = 2f + a + \frac{s}{B'},$$

rum formularum productum ipsi $4ff$ est aequandum, unde oritur haec quatio a fractionibus liberata:

$$aaA'B' - A's(2f-a) - B's(2f+a) - ss = 0.$$

quae commode per factores repraesentari poterit ...

$$(A'-2f-a)(B'-2f+a)=4ff.$$

8. Quia nunc, si ambae litterae A' et B' essent aequales[1]), ex foret $A'=B'=4f$, legem supra allatam sequentes statuamus:

$$A'=4f-2a+\frac{s'}{A''}$$

et

$$B'=4f+2a+\frac{s'}{B''},$$

quibus substitutis ultima aequatio induet hanc formam:

$$\left(2f-3a+\frac{s'}{A''}\right)\left(2f+3a+\frac{s'}{B''}\right)=4ff.$$

Facta igitur evolutione et sublatis fractionibus orietur sequens ...

$$9aaA''B''-A''s'(2f-3a)-B''s'(2f+3a)-s's'=0.$$

Sumatur ergo hic $s'=9aa$, ut habeatur ista [aequatio]:

$$A''B''-A''(2f-3a)-B''(2f+3a)=9aa,$$

quae iterum per factores hoc modo repraesentari potest:

$$(A''-2f-3a)(B''-2f+3a)=4ff.$$

9. Cum nunc iterum medius valor inter A'' et B'' sit $4f$, sta...

$$A''=4f-2a+\frac{s''}{A'''}\quad \text{et}\quad B''=4f+2a+\frac{s''}{B'''},$$

1) Scilicet: omisso a; confer § 18. C. B.

acta substitutione emerget ista aequatio:

$$\left(2f - 5a + \frac{s''}{A'''}\right)\left(2f + 5a + \frac{s''}{B'''}\right) = 4ff.$$

ta igitur evolutione sublatisque fractionibus erit

$$25aaA'''B''' - A'''s''(2f - 5a) - B'''s''(2f + 5a) - s''s'' = 0.$$

uatur $s'' = 25aa$, et ista aequatio hanc induet formam:

$$A'''B''' - A'''(2f - 5a) - B'''(2f + 5a) = 25aa,$$

e per factores hoc modo repraesentari potest:

$$(A''' - 2f - 5a)(B''' - 2f + 5a) = 4ff.$$

10. Statuatur denuo, ut ante,

$$A''' = 4f - 2a + \frac{s'''}{A^{\mathrm{IV}}} \quad \text{et} \quad B''' = 4f + 2a + \frac{s'''}{B^{\mathrm{IV}}}$$

ue facta substitutione

$$\left(2f - 7a + \frac{s'''}{A^{\mathrm{IV}}}\right)\left(2f + 7a + \frac{s'''}{B^{\mathrm{IV}}}\right) = 4ff,$$

aequatione evoluta et in ordinem redacta obtinetur

$$A^{\mathrm{IV}}B^{\mathrm{IV}} - A^{\mathrm{IV}}(2f - 7a) - B^{\mathrm{IV}}(2f + 7a) = 49aa,$$

scilicet posuimus $s''' = 49aa$; tum vero per factores erit

$$(A^{\mathrm{IV}} - 2f - 7a)(B^{\mathrm{IV}} - 2f + 7a) = 4ff.$$

e perspicuum est, quomodo hae operationes sint ulterius continuandae.

pro $2A$ adipiscemur sequentem fractionem continuam:

$$2A = 2f - a + \cfrac{aa}{4f - 2a + \cfrac{9aa}{4f - 2a + \cfrac{25aa}{4f - 2a + \cfrac{49a\cdots}{4f - \cdots}}}}$$

ubi, si loco f ordine scribamus $f+a$, $f+2a$, $f+3a$ et
continuae prodibunt pro $2B$, $2C$, $2D$ etc., quae ita se h

$$2B = 2f + a + \cfrac{aa}{4f + 2a + \cfrac{9aa}{4f + 2a + \cfrac{25aa}{4f + 2a + \cfrac{49aa\cdots}{4f + \cdots}}}}$$

$$2C = 2f + 3a + \cfrac{aa}{4f + 6a + \cfrac{9aa}{4f + 6a + \cfrac{25aa}{4f + 6a + \cfrac{49aa\cdots}{4f + \cdots}}}}$$

$$2D = 2f + 5a + \cfrac{aa}{4f + 10a + \cfrac{9aa}{4f + 10a + \cfrac{25aa}{4f + 10a + \cdots}}}$$

etc.

12. Quodsi iam hic ponamus $f = 1$ et $a = 1$, pr
Wallisio tractatus, unde fractiones continuae a Wallisi
valoribus per quadraturam circuli expressis erunt sequen

$$2A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}} = \frac{2}{q} = \frac{4}{\pi},$$

$$2B = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{9}{6 + \cfrac{25}{6 + \cfrac{49}{6 + \text{etc.}}}}} = 2q = \pi,$$

$$2C = 5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{9}{10 + \cfrac{25}{10 + \cfrac{49}{10 + \text{etc.}}}}} = \frac{8}{q} = \frac{16}{\pi},$$

$$2D = 7 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{9}{14 + \cfrac{25}{14 + \cfrac{49}{14 + \text{etc.}}}}} = \frac{9q}{2} = \frac{9\pi}{4},$$

$$2E = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{9}{18 + \cfrac{25}{18 + \cfrac{49}{18 + \text{etc.}}}}} = \frac{128}{9q} = \frac{256}{9\pi},$$

rum prima est ipsa fractio continua a BROUNCKERO inventa.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{\pi}{4},$$

quae vulgo LEIBNITIO tribui solet, multo autem ante a JACOBO GREGORIO eruta, a quo BROUNCKERUS eam nosse potuerat, derivasse, quippe quod per rationes satis faciles et obvias fieri potuit sequentem in modum:

Posito	erit
$\frac{\pi}{4} = 1 - \alpha$	$\frac{4}{\pi} = \frac{1}{1-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} = 1 + \cfrac{1}{-1 + \frac{1}{\alpha}}$
$\alpha = \frac{1}{3} - \beta$	$\frac{1}{\alpha} = \frac{3}{1-3\beta} = 3 + \frac{9\beta}{1-3\beta} = 3 + \cfrac{9}{-3 + \frac{1}{\beta}}$
$\beta = \frac{1}{5} - \gamma$	$\frac{1}{\beta} = \frac{5}{1-5\gamma} = 5 + \frac{25\gamma}{1-5\gamma} = 5 + \cfrac{25}{-5 + \frac{1}{\gamma}}$
$\gamma = \frac{1}{7} - \delta$	$\frac{1}{\gamma} = \frac{7}{1-7\delta} = 7 + \frac{49\delta}{1-7\delta} = 7 + \cfrac{49}{-7 + \frac{1}{\delta}}$
etc.	etc.

Quodsi iam hic loco $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ etc. valores modo inventi substituantur, se offert ipsa fractio continua BROUNCKERI, siquidem hinc sequitur fore

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}}$$

14. Quod autem ad nostram problematis solutionem generalem a etiam singularum fractionum continuarum valores per certas quadratur primere licet, id quod in sequente problemate ostendamus.

1) Vide *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I14, imprimis notam ad p. 79 adiectam.

PROBLEMA

Proposita serie A, B, C, D etc. secundum legem uniformem procedente, ita ut sit

$$AB = ff, \quad BC = (f+a)^2, \quad CD = (f+2a)^2 \quad \text{etc.},$$

omnium harum litterarum valores primo quidem per producta continua, tum vero per formulas integrales expressas investigare.

SOLUTIO

5. Cum igitur sit

$$A = \frac{ff}{B}, \quad B = \frac{(f+a)^2}{C}, \quad C = \frac{(f+2a)^2}{D} \text{ etc.},$$

valoribus continuo substitutis reperietur

$$A = \frac{ff(f+2a)^2(f+4a)^2(f+6a)^2 \text{ etc.}}{(f+a)^2(f+3a)^2(f+5a)^2 \text{ etc.}}$$

in infinitum. Cum autem hoc modo nullus determinatus valor oriatur, quoniam, ubicunque abrumpitur, vel in numeratoribus vel in denominatoribus factor redundat, hoc incommodum tolletur, si factores simplices sequenti modo disponamus:

$$A = f \cdot \frac{f(f+2a)}{(f+a)(f+a)} \cdot \frac{(f+2a)(f+4a)}{(f+3a)(f+3a)} \cdot \frac{(f+4a)(f+6a)}{(f+5a)(f+5a)} \cdot \text{etc.},$$

ubi membra continuo propius ad unitatem accedunt et in infinitum ipsi unitati aequantur, sicque ista expressio utique determinatum valorem habebit.

6. Quo autem ostendamus, quomodo eius valorem ad formulas integrales revocari oporteat, in subsidium vocemus hoc lemma:

Formulis integralibus ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensis erit

$$\int_0^1 \frac{x^{m+k-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{m+k}{m} \cdot \frac{m+k+n}{m+n} \cdot \frac{m+k+2n}{m+2n} \cdot \frac{m+k+3n}{m+3n} \cdot \frac{m+k+4n}{m+4n} \cdot \ldots \cdot \int_0^1 \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}.$$

tum vero sumto $m = f$ et $k = a$ habebimus

$$\int \frac{x^{f-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{f+a}{f} \cdot \frac{f+3a}{f+2a} \cdot \frac{f+5a}{f+4a} \cdot \ldots \cdot \int \frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

quae expressio, inversa, praebet priores singulorum membrorum fa
posterioribus sumamus $m = f + a$ manente $k = a$, hocque facto er

$$\int \frac{x^{f+a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{f+2a}{f+a} \cdot \frac{f+4a}{f+3a} \cdot \frac{f+6a}{f+5a} \cdot \ldots \cdot \int \frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

17. Evidens nunc est posteriorem formulam per priorem divi
nostrum productum continuum exhibere, quo pacto ambo integr
tesima se mutuo tollunt, consequenter habemus

$$A = \int \frac{x^{f+a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

Simili modo pretinus

$$B = \int \frac{x^{f+2a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f+a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

$$C = \int \frac{x^{f+3a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f+2a-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}$$

etc.

At vero haec investigatio adhuc generalior reddi potest, quemadmod
problema docebit.

PROBLEMA GENERALIUS

Invenire seriem uniformi lege procedentem A, B, C, D etc., ita

$$AB = ff + c, \quad BC = (f+a)^2 + c, \quad CD = (f+2a)^2 + c,$$
$$DE = (f+3a)^2 + c \quad \textit{etc.},$$

ubi in singulis productis littera f quantitate a augeatur.

18. Hic iterum evidens est, qualis A fuerit functio ipsius f, talem esse ore B functionem ipsius $f+a$, C ipsius $f+2a$, D ipsius $f+3a$ et ita ro. Cum igitur sit $AB=ff+c$, si A et B essent aequales, omisso c t $A=B=f$. Quanto igitur A minor accipitur quam f, tanto B debet maior; unde posito $A=f-x$ erit $B=f+x$. Quoniam autem B ex A citur, si loco f scribatur $f+a$, etiam esse debet $B=f+a-x$, unde cludimus fore $x=\frac{1}{2}a$; sicque partes principales pro A et B erunt

$$A=f-\frac{1}{2}a \quad \text{et} \quad B=f+\frac{1}{2}a$$

$$2A=2f-a \quad \text{et} \quad 2B=2f+a$$

oque pro sequentibus

$$2C=2f+3a, \quad 2D=2f+5a, \quad 2E=2f+7a \quad \text{etc.}$$

19. His valoribus principalibus inventis ponamus revera esse

$$2A=2f-a+\frac{s}{A'}, \quad 2B=2f+a+\frac{s}{B'}\cdot$$

pro s mox idoneus valor emerget. Hinc igitur erit

$$4AB=4ff-aa+\frac{s}{A'}(2f+a)+\frac{s}{B'}(2f-a)+\frac{ss}{A'B'}=4ff+4c,$$

e aequatio sublatis fractionibus hanc induet formam:

$$A'B'(aa+4c)-A's(2f-a)-B's(2f+a)-ss=0.$$

namus iam $s=aa+4c$, eritque facta divisione

$$A'B'-A'(2f-a)-B'(2f+a)=aa+4c,$$

20. Nunc simili modo ut ante ratiocinando intelligitu
aequales, membrum sinistrum fore

$$A'A' - 4fA' = 0 \quad \text{ideoque} \quad A' = B' =$$

Quia autem B' oriri debet ex A', si loco f scribatur $f +$
principales fore

$$A' = 4f - 2a \quad \text{et} \quad B' = 4f + 2a.$$

Revera igitur ponamus esse

$$A' = 4f - 2a + \frac{s'}{A''} \quad \text{et} \quad B' = 4f + 2a +$$

unde, si hi valores substituantur, aequatio praecedens p
hanc induet formam:

$$\left(2f - 3a + \frac{s'}{A''}\right)\left(2f + 3a + \frac{s'}{B''}\right) = 4ff +$$

quae facta evolutione ad istam perducit aequationem:

$$(4ff - 9aa) + \frac{s'}{A''}(2f + 3a) + \frac{s'}{B''}(2f - 3a) + \frac{s's'}{A''B''}$$

haecque sublatis fractionibus abit in hanc:

$$A''B''(9aa + 4c) - A''s'(2f - 3a) - B''s'(2f + 3a)$$

Sumto igitur $s' = 9aa + 4c$ et facta divisione oritur haec

$$A''B'' - A''(2f - 3a) - B''(2f + 3a) = 9aa$$

quae per factores repraesentari potest hoc modo:

$$(A'' - 2f - 3a)(B'' - 2f + 3a) = 4ff + 4$$

. Quia haec aequatio similis est praecedenti iterumque pro casu $A'' = B''$ t $4f$, statuatur ulterius

$$A'' = 4f - 2a + \frac{s''}{A'''} \quad \text{et} \quad B'' = 4f + 2a + \frac{s''}{B'''},$$

ostrema aequatio per factores foret

$$\left(2f - 5a + \frac{s''}{A'''}\right)\left(2f + 5a + \frac{s''}{B'''}\right) = 4ff + 4c.$$

a evolutione sublatisque fractionibus prodit

$$A'''B'''(25aa + 4c) - A'''s''(2f - 5a) - B'''s''(2f + 5a) - s''s'' = 0.$$

o igitur $s'' = 25aa + 4c$ et dividendo per s'' fiet

$$A'''B''' - A'''(2f - 5a) - B'''(2f + 5a) = 25aa + 4c$$

· productum

$$(A''' - 2f - 5a)(B''' - 2f + 5a) = 4ff + 4c.$$

Statuatur ulterius

$$A''' = 4f - 2a + \frac{s'''}{A^{\mathrm{IV}}} \quad \text{et} \quad B''' = 4f + 2a + \frac{s'''}{B^{\mathrm{IV}}},$$

·ior aequatio per productum substitutis his valoribus erit

$$\left(2f - 7a + \frac{s'''}{A^{\mathrm{IV}}}\right)\left(2f + 7a + \frac{s'''}{B^{\mathrm{IV}}}\right) = 4ff + 4c,$$

dem operationibus repetitis sumtoque $s''' = 49aa + 4c$ ad sequentem r:

$$A^{\mathrm{IV}}B^{\mathrm{IV}} - A^{\mathrm{IV}}(2f - 7a) - B^{\mathrm{IV}}(2f + 7a) = 49aa + 4c,$$

factoribus erit

$$(A^{\mathrm{IV}} - 2f - 7a)(B^{\mathrm{IV}} - 2f + 7a) = 4ff + 4c.$$

us iam abunde liquet, quomodo calculum ulterius prosequi oporteat.

pro A obtinebimus sequentem fractionem continuam:

$$2A = 2f - a + \cfrac{aa + 4c}{4f - 2a + \cfrac{9aa + 4c}{4f - 2a + \cfrac{25aa + 4c}{4f - 2a + \cfrac{49aa + 4c}{4f - 2a + \ldots}}}}$$

Simili modo hinc erit

$$2B = 2f + a + \cfrac{aa + 4c}{4f + 2a + \cfrac{9aa + 4c}{4f + 2a + \cfrac{25aa + 4c}{4f + 2a + \cfrac{49aa + 4c}{4f + 2a + \ldots}}}}$$

$$2C = 2f + 3a + \cfrac{aa + 4c}{4f + 6a + \cfrac{9aa + 4c}{4f + 6a + \cfrac{25aa + 4c}{4f + 6a + \cfrac{49aa + 4c}{4f + 6a + \ldots}}}}$$

$$2D = 2f + 5a + \cfrac{aa + 4c}{4f + 10a + \cfrac{9aa + 4c}{4f + 10a + \cfrac{25aa + 4c}{4f + 10a + \cfrac{49aa + \ldots}{4f + 10\ldots}}}}$$

etc.

SOLUTIO ALTERA PER PRODUCTA CONTINUA

24. Cum sit

$$AB = ff + c, \quad BC = (f + a)^2 + c, \quad CD = (f + 2a)^2 + c, \quad DE = (f \ldots$$

erit

$$A = \frac{(ff + c)((f + 2a)^2 + c)((f + 4a)^2 + c)((f + 6a)^2 + c) \text{ etc.}}{((f + a)^2 + c)((f + 3a)^2 + c)((f + 5a)^2 + c) \text{ etc.}}$$

$$A = \frac{ff+c}{(f+a)^2+c} \cdot \frac{(f+2a)^2+c}{(f+3a)^2+c} \cdot ((f+4a)^2+c) \cdot \frac{1}{F}.$$

Quando autem in sequente littera, G, subsistimus, fiet

$$A = \frac{ff+c}{(f+a)^2+c} \cdot \frac{(f+2a)^2+c}{(f+3a)^2+c} \cdot \frac{(f+4a)^2+c}{(f+5a)^2+c} \cdot G.$$

25. Quodsi ergo istae binae expressiones in infinitum continuentur se invicem ducantur, ultimus factor litteralis, qui hic est $\frac{G}{F}$, manifesto u aequabitur. Quia vero hoc casu numerus factorum in numeratore u redundat, eius factorem primum in fronte seorsim scribamus, atque prod sequenti modo exprimetur:

$$A^2 = (ff+c) \cdot \frac{(ff+c)((f+2a)^2+c)}{((f+a)^2+c)((f+a)^2+c)} \cdot \frac{((f+2a)^2+c)((f+4a)^2+c)}{((f+3a)^2+c)((f+3a)^2+c)} \cdot \text{et}$$

ubi iam infinitesimi factores unitati aequabuntur sicque ista expressi formi lege procedit.

Hic autem duos casus distingui conveniet, prouti c fuerit numer negativus vel positivus.

CASUS 1, QUO $c = -bb$

26. Priore casu quilibet factor in duos resolvi se patietur. Stat igitur primo $c = -bb$, quo casu fractio continua sequenti modo ex potest:

$$2A = 2f - a + \cfrac{(a+2b)(a-2b)}{4f - 2a + \cfrac{(3a+2b)(3a-2b)}{4f - 2a + \cfrac{(5a+2b)(5a-2b)}{4f - 2a + \cfrac{(7a+2b)(7a-2b)}{4f - 2a + \text{etc.}}}}}$$

mulam integralem exprimi poterunt.

27. Constat enim, si haec formula integralis:

$$\int \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$$

ab $x=0$ usque ad $x=1$ extendatur, valorem reduci ad sequens
infinitum:

$$\frac{m+k}{m}\cdot\frac{m+k+n}{m+n}\cdot\frac{m+k+2n}{m+2n}\cdots\cdots\int\frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}.$$

Quo igitur hanc formam ad nostram expressionem accomodemus, c
factores in sequenti membro quantitate $2a$ augentur, sumi debet n
vero posito $m=f+b$ et $k=a$ reperietur fore

$$\frac{f+a+b}{f+b}\cdot\frac{f+3a+b}{f+2a+b}\cdot\frac{f+5a+b}{f+4a+b}\cdots\cdots\int\frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}=\int\frac{x^{f+b-1}\partial}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

quae expressio, inversa, priores factores cuiusque membri continet.
rioribus autem manente $n=2a$ sumatur $m=f+a-b$ et $k=a$,
prodibit haec aequatio:

$$\frac{f+2a-b}{f+a-b}\cdot\frac{f+4a-b}{f+3a-b}\cdot\frac{f+6a-b}{f+5a-b}\cdots\cdots\int\frac{x^{\infty}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}=\int\frac{x^{f+a-b}}{\sqrt{1-}}$$

Si igitur haec aequatio per praecedentem dividatur, postremi fa

s se mutuo destruent prodibitque productum infinitum in valore A occns per duas formulas integrales expressum, ita ut sit

$$A = (f-b) \cdot \int \frac{x^{f+a-b-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} : \int \frac{x^{f+b-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}.$$

28. Quo haec exemplo illustremus, sumamus $f=2$, $a=1$, $b=1$, ut imus hos valores:

$$AB=3, \quad BC=8, \quad CD=15, \quad DE=24 \text{ etc.}$$

uo casu nostra fractio continua evadit

$$2A = 3 - \cfrac{3}{6 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{21}{6 + \cfrac{45}{6 + \cfrac{77}{6 + \text{etc.}}}}}}$$

or productum continuum erit

$$A = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\cdot \text{etc.}$$

vero per formulas integrales habebitur

$$A = \int \frac{x\partial x}{\sqrt{1-xx}} : \int \frac{xx\partial x}{\sqrt{1-xx}}.$$

tat autem pro nostris terminis integrationis, ab $x=0$ usque ad $x=1$,

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{1-xx}} = 1 \quad \text{et} \quad \int \frac{xx\partial x}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{4},$$

colligitur $A = \frac{4}{\pi}$, id quod cum ipso producto WALLISIANO, quo

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot \text{etc.},$$

gie convenit.

29. Evolvamus nunc quoque alterum casum $c = + bb$,
continua hanc formam induit:

$$2A = 2f - a + \cfrac{aa + 4bb}{4f - 2a + \cfrac{9aa + 4bb}{4f - 2a + \cfrac{25aa + 4bb}{4f - 2a + \cfrac{49aa + 4}{4f - 2a +}}}}$$

At vero productum continuum ex praecedente forma loco b s
ita imaginario expressum se prodit:

$$A = (f - b\sqrt{-1}) \cdot \frac{(f + b\sqrt{-1})(f + 2a - b\sqrt{-1})}{(f + a + b\sqrt{-1})(f + a - b\sqrt{-1})} \cdot \frac{(f + 2a + b\sqrt{-1})(f +}{(f + 3a + b\sqrt{-1})(f +}$$

Evidens autem est in eadem expressione § 26 allata etiam loco
$-b\sqrt{-1}$, unde prodiisset

$$A = (f + b\sqrt{-1}) \frac{(f - b\sqrt{-1})(f + 2a + b\sqrt{-1})}{(f + a - b\sqrt{-1})(f + a + b\sqrt{-1})} \cdot \frac{(f + 2a - b\sqrt{-1})(f +}{(f + 3a - b\sqrt{-1})(f +}$$

Productum igitur harum duarum expressionum fit reale; erit

$$A^2 = (ff + bb) \frac{(ff + bb)((f + 2a)^2 + bb)}{((f + a)^2 + bb)((f + a)^2 + bb)} \cdot \frac{((f + 2a)^2 + bb)((f + 4a}{((f + 3a)^2 + bb)((f + 3a}$$

quae expressio congruit cum superiore § 25 inventa.

30. At vero etiam expressio per formulas integrales ev
Si enim in formulis § 27 loco b scribatur $b\sqrt{-1}$, orietur sec

$$A = (f - b\sqrt{-1}) \int \frac{x^{f + a - 1 - b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1 - x^{2a}}} : \int \frac{x^{f - 1 + b\sqrt{-1}}\partial}{\sqrt{1 - x^{2a}}}$$

Verum mutato imaginariorum signo erit

$$A = (f + b\sqrt{-1}) \int \frac{x^{f + a - 1 + b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1 - x^{2a}}} : \int \frac{x^{f - 1 - b\sqrt{-1}}\partial}{\sqrt{1 - x^{2a}}}$$

ubi nullum est dubium, quin in utraque expressione imaginaria se m
destruant, etiamsi nulla pateat methodus hanc mutuam imaginariorum dest
tionem actu evolvere.

31. Verum si hae ambae expressiones in se mutuo ducantur, tum
destructio haud difficulter ostendi poterit. Cum enim productum sit

$$A^2 = (ff + bb) \cdot \frac{\int \frac{x^{f+a-1-b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} \cdot \int \frac{x^{f+a-1+b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}}{\int \frac{x^{f-1+b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} \cdot \int \frac{x^{f-1-b\sqrt{-1}}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}}},$$

demonstrari potest tam in numeratore quam in denominatore imagin
seorsim se destruere, quod quidem pro denominatore ostendisse sufficiet,
numerator inde oriatur scribendo $f+a$ loco f.

32. Quo demonstratio succinctior reddatur, ponamus brevitatis gratia

$$\frac{x^{f-1}\partial x}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \partial V,$$

quo facto denominator nostrae expressionis imaginariis affectae erit

$$\int x^{+b\sqrt{-1}}\partial V \cdot \int x^{-b\sqrt{-1}}\partial V.$$

Iam statuatur factorum

$$\text{summa} = \int (x^{b\sqrt{-1}} + x^{-b\sqrt{-1}})\partial V = p,$$

$$\text{differentia} = \int (x^{b\sqrt{-1}} - x^{-b\sqrt{-1}})\partial V = q,$$

atque notum est productum propositum fore

$$\int x^{b\sqrt{-1}}\partial V \cdot \int x^{-b\sqrt{-1}}\partial V = \frac{pp - qq}{4}.$$

Monstrabo igitur tam pp quam qq ad quantitates reales reduci posse.

$$p = \int (e^{blx\sqrt{-1}} + e^{-blx\sqrt{-1}})\,\partial V,$$
$$q = \int (e^{blx\sqrt{-1}} - e^{-blx\sqrt{-1}})\,\partial V.$$

Cum igitur noverimus esse

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\cos.\varphi$$

et

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin.\varphi,$$

posito brevitatis gratia $blx = \varphi$ fiet

$$p = 2\int \partial V \cos.\varphi \quad \text{et} \quad q = 2\sqrt{-1}\int \partial V \sin.\varphi,$$

unde sponte fluit denominator

$$\frac{pp - qq}{4} = \left(\int \partial V \cos.\varphi\right)^2 + \left(\int \partial V \sin.\varphi\right)^2,$$

expressio, quae manifesto est realis.

34. Hinc facile colligitur valor numeratoris, quippe qui erit

$$\left(\int x^a \partial V \cos.\varphi\right)^2 + \left(\int x^a \partial V \sin.\varphi\right)^2,$$

ita ut expressio nostra imaginariis turbata pro A^2 sequenti m
repraesentetur:

$$A^2 = (ff + bb)\frac{(\int x^a \partial V \cos.\varphi)^2 + (\int x^a \partial V \sin.\varphi)^2}{(\int \partial V \cos.\varphi)^2 + (\int \partial V \sin.\varphi)^2}$$

existente

$$\partial V = \frac{x^{f-1}\partial x}{\sqrt{1 - x^{2a}}} \quad \text{et} \quad \varphi = blx.$$

35. In analysi autem adhuc desideratur methodus per i
tractandi huiusmodi formulas:

$$\int \frac{x^{f-1}\partial x \cos.blx}{\sqrt{1 - x^{2a}}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^{f-1}\partial x \sin.blx}{\sqrt{1 - x^{2a}}}.$$

rim tamen si denominator abesset, utraque formula revera integrari posset, quod sequenti modo ostendisse operae pretium erit.

36. Praestari enim hoc poterit ope reductionis notissimae

$$\int P\partial Q = PQ - \int Q\partial P.$$

cilicet pro formula priore sumatur

$$P = \cos. blx \quad \text{et} \quad \partial Q = x^{f-1}\partial x,$$

$$\int x^{f-1}\partial x \cos. blx = \frac{x^f}{f}\cos. blx + \frac{b}{f}\int x^{f-1}\partial x \sin. blx.$$

altera vero, sumto

$$P = \sin. blx \quad \text{et} \quad \partial Q = x^{f-1}\partial x,$$

$$\int x^{f-1}\partial x \sin. blx = \frac{x^f}{f}\sin. blx - \frac{b}{f}\int x^{f-1}\partial x \cos. blx.$$

c porro colligitur substituendo

$$\int x^{f-1}\partial x \cos. blx = \frac{x^f}{ff+bb}(f\cos. blx + b\sin. blx),$$

$$\int x^{f-1}\partial x \sin. blx = \frac{x^f}{ff+bb}(f\sin. blx - b\cos. blx).$$

vero accedente denominatore nihil aliud intelligitur, nisi integrale ad genus ntitatum maxime transcendentium adhuc ignotum revolvi.

METHODUS SUCCINCTA SUMMAS SERIERUM INFINITARUM PER FORMULAS DIFFERENTIALES INVESTIGA

Conventui exhibuit die 13. Martii 1780

Commentatio 746 indicis ENESTROEMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812), 1815, p. 45—

1. Etsi hoc argumentum iam saepius[1]) pertractavi, tamen plerad ad summas commode exprimendas spectant, per varios libros sunt atque etiam per ambages eruta; quamobrem hic succinctam methoc traditurus, cuius ope seriei cuiuscunque summa facili calculo sine a per formam simplicissimam indagari poterit.

2. Sit igitur X functio quaecunque ipsius x, et X', X'', X''' oriantur, si loco x successive scribatur $x+1$, $x+2$, $x+3$ etc. H litterae illae X, X', X'', X''' etc. mihi designabunt terminos cuiusq indicibus x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ etc. respondentes. His positis du serierum infinitarum sum contemplaturus, quorum priore termini omn signo $+$ affecti progrediuntur, ita ut series summanda sit

$$X + X' + X'' + X''' + \text{etc}$$

1) Confer Commentationes 25, 41, 47, 55, 61, 63, 130, 189, 352, 393, 597. Confer po *Introductionem in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, t. I cap. X et *Institutiones c rentialis*, 1755, partis posterioris cap. V; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series pri p. 42, 73, 108, 124, 138, 177, 407, 463; vol. 15 p. 70, 91, 701; vol. 8 p. 181; vol. 10 p. 3

ero vero casu iidem termini signis alternantibus procedant, ita ut series manda sit

$$X - X' + X'' - X''' + \text{etc.}$$

igitur duos casus seorsim evolvam.

CASUS I

SUMMATIO SERIEI INFINITAE $S = X + X' + X'' + X''' + \text{etc.}$

3. Denotet S' summam eiusdem seriei primo termino truncatae, ita ut sit

$$S' = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$

cum S sit certa functio ipsius x, quam hic potissimum investigamus, erit imilis functio ipsius $x+1$. Evidens ergo est fore $S - S' = X$. Quare sit

$$S' = S + \partial S + \frac{1}{2}\partial\partial S + \text{etc.},$$

denominatores, potestates elementi ∂x continentes, ut brevitati consulam, termitto, siquidem quasi sponte subintelliguntur, hinc nostra aequatio et hanc formam:

$$0 = X + \partial S + \frac{1}{2}\partial\partial S + \frac{1}{6}\partial^3 S + \frac{1}{24}\partial^4 S + \text{etc.}$$

4. Quodsi ergo ista series valde convergat, propemodum erit $\partial S = -X$ que $S = -\int X\partial x$, quod integrale per constantem ita est determinandum, umto x infinito magno evanescat, propterea quod termini infinitesimi pro o haberi possunt, quia alias series ipsa nullam haberet summam finitam. ita propemodum summa, pro vera summa statuamus

$$S = -\int X\partial x - \alpha X - \beta\partial X - \gamma\partial\partial X - \text{etc.}$$

ue hinc

$$\partial S = -X - \alpha\partial X - \beta\partial\partial X - \gamma\partial^3 X - \text{etc.}$$

stituantur, pervenietur ad sequentem aequationem:

$$\left.\begin{array}{llllll}
+X - \alpha\partial X - & \beta\partial\partial X - & \gamma\partial^3 X - & \delta\partial^4 X - \text{etc.} \\
-X - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\alpha & -\frac{1}{2}\beta & -\frac{1}{2}\gamma & \\
& -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\alpha & -\frac{1}{6}\beta & \\
& & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{24}\alpha & \\
& & & -\frac{1}{120} &
\end{array}\right\} = 0$$

et iam coëfficientes incogniti α, β, γ etc. ex sequentibus aequali
finiri debent:

$$\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad \beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{6} = 0, \quad \gamma + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{24} = 0$$

unde fit

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{12}, \quad \gamma = 0 \quad \text{etc.}$$

5. Hoc autem modo inventio litterarum α, β, γ etc. nimis fo
neque tamen ulla lex perspiceretur, qua ulterius progrediuntur;
modo prorsus singulari in valores istarum litterarum inquiram.
scilicet seriem ordinariam secundum eosdem coëfficientes procedente

$$V = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.},$$

atque evidens est, si huius seriei summa V ad formam finitam po
tum, si eadem secundum potestates ipsius z evolvatur, eandem se
sario provenire debere, quo pacto valores litterarum α, β, γ, δ
innotescent.

6. Ex relationibus igitur, quae inter litteras α, β, γ, δ etc.
supra § 4 allatis, sequentes operationes instituantur:

$$
\begin{array}{rccccccc}
V = & 1 + & \alpha z + & \beta z^2 + & \gamma z^3 + & \delta z^4 + & \varepsilon z^5 + & \text{etc.,}\\[4pt]
\frac{1}{2} z V = & & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}\alpha & +\frac{1}{2}\beta & +\frac{1}{2}\gamma & +\frac{1}{2}\delta & +\text{etc.,}\\[4pt]
\frac{1}{6} zz V = & & & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{6}\alpha & +\frac{1}{6}\beta & +\frac{1}{6}\gamma & +\text{etc.,}\\[4pt]
\frac{1}{24} z^3 V = & & & & +\frac{1}{24} & +\frac{1}{24}\alpha & +\frac{1}{24}\beta & +\text{etc.,}\\[4pt]
\frac{1}{120} z^4 V = & & & & & +\frac{1}{120} & +\frac{1}{120}\alpha & +\text{etc.,}\\[4pt]
\frac{1}{720} z^5 V = & & & & & & +\frac{1}{720} & +\text{etc.}
\end{array}
$$

etc.

cilicet modo omnes termini praeter primum ad nihilum sunt redacti; e ergo

$$V\left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{24}z^3 + \frac{1}{120}z^4 + \frac{1}{720}z^5 + \text{etc.}\right) = 1.$$

. Cum igitur sit

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \text{etc.,}$$

$$\frac{V(e^z - 1)}{z} = 1$$

o

$$V = \frac{z}{e^z - 1};$$

expressio quo facilius iterum in seriem converti queat, ponamus $z = 2t$,

$$V = \frac{2t}{e^{2t} - 1}$$

e

$$V + t = t \cdot \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1}.$$

statuatur

$$\frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} = u$$

$$u = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}},$$

hinc exponentialibus evolutis erit

$$u = \frac{1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{720}t^6 + \text{etc.}}{t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{5040}t^7 + \text{etc.}},$$

ubi in numeratore solae potestates pares, in denominato
states impares occurrunt. Patet autem sumto t quam m
sequentes vero terminos per potestates t, t^3, t^5 etc. esse p

8. Cum igitur posuerimus

$$u = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1},$$

erit

$$e^{2t} = \frac{u + 1}{u - 1}$$

ideoque

$$2t = l\frac{u + 1}{u - 1}.$$

Hinc ergo differentiando erit

$$\partial t = -\frac{\partial u}{uu - 1},$$

unde concluditur fore

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu - 1 = 0.$$

Quia autem novimus primum terminum seriei, qua u expri
sequentium potestatum exponentes binario crescere, statuatur

$$u = \frac{1}{t} + 2At - 2Bt^3 + 2Ct^5 - 2Dt^7 + \text{etc.}$$

...stituto sequenti modo:

$$\frac{1}{u} + 2A - 6Bu^2 + 10Cu^4 - 14Du^6 + 18Eu^8 - \text{etc.},$$

$$+\frac{1}{u} + 4A - 4B + 4C - 4D + 4E - \text{etc.},$$

$$+ 4AA - 8AB + 8AC - 8AD$$

$$+ 4BB - 8BC$$

$$1,$$

...i primi se sponte destruunt, reliqui vero sequentes praebent deter-...:

$$6A = 1 \quad \text{ergo} \quad A = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6},$$

$$10B = 4AA \quad \text{ergo} \quad B = \frac{2}{5}AA = \frac{1}{90},$$

$$14C = 8AB \quad \text{ergo} \quad C = \frac{2}{7}\cdot 2AB = \frac{1}{945},$$

$$18D = 8AC + 4BB \quad \text{ergo} \quad D = \frac{2}{9}(2AC + BB) = \frac{1}{9450},$$

$$22E = 8(AD + BC) \quad \text{ergo} \quad E = \frac{2}{11}(2AD + 2BC) = \frac{1}{93555}$$

etc.

...ae ergo litterae A, B, C, D etc. prorsus eaedem sunt, quibus ...summas potestatum reciprocarum exprimendas sum usus, siquidem

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = A\pi^2,$$

$$1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.} = B\pi^4,$$

$$1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.} = C\pi^6$$

etc.,

...r Commentationes supra laudatas, imprimis 41, 61, 63, 130, 393, 597. C. B.

10. Cum igitur sumserimus

$$u = \frac{1}{t} + 2At - 2Bt^3 + 2Ct^5 - \text{etc.},$$

ob

$$V = tu - t$$

erit

$$V = 1 - t + 2At^2 - 2Bt^4 + 2Ct^6 - 2Dt^8 + \text{etc.},$$

ubi nil aliud superest, nisi ut loco t scribatur $\frac{1}{2}z$, unde prodit

$$V = 1 - \frac{z}{2} + \frac{Azz}{2} - \frac{Bz^4}{8} + \frac{Cz^6}{32} - \frac{Dz^8}{128} + \text{etc.}$$

Cum igitur habuerimus

$$V = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.},$$

collatione instituta reperiemus

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}A, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -\frac{1}{8}B, \quad \varepsilon = 0, \quad \zeta = \frac{1}{32}C, \quad \eta =$$

11. Inventis iam valoribus harum litterarum summa seriei prop

$$S = X + X' + X'' + X''' + \text{etc.}$$

sequenti modo exprimetur:

$$S = -\int X \partial x + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}A\partial X + \frac{1}{8}B\partial^3 X - \frac{1}{32}C\partial^5 X + \frac{1}{128}D\partial^7 X$$

$$-\frac{1}{512}E\partial^9 X + \text{etc.},$$

---

1) In Commentatione 597, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, vol. I_{16}, p. 712. C

si constans adiicienda debeat esse infinita, etiam ipsam seriei summam infinitam.

12. Consideremus exemplum, quo $X = \frac{1}{x^n}$, ita ut huius seriei summ quaerenda:

$$S = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} + \frac{1}{(x+3)^n} + \text{etc.}$$

Hic igitur erit

$$\int X \partial x = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}},$$

quae forma ut evanescat posito $x = \infty$, necesse est, ut exponens n sit tato maior. Alioquin enim, si esset $n = 1$ vel $n < 1$, summa seriei certe infinite magna. Porro vero erit

$$\partial X = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad \text{hinc} \quad \partial^3 X = -\frac{n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}}, \quad \partial^5 X = -\frac{n \cdots (n+4)}{x^{n+5}} \text{ et}$$

quibus valoribus substitutis summa quaesita erit

$$S = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{2x^n} + \frac{A}{2} \cdot \frac{n}{x^{n+1}} - \frac{B}{8} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{x^{n+3}} + \frac{C}{32} \cdot \frac{n \cdots (n+4)}{x^{n+5}} - \text{e}$$

quae series eo magis converget, quo maior accipietur numerus x, praeterea quod litterae A, B, C etc. progressionem valde convergentem constituun

13. Quodsi ergo ab unitate incipiendo hi termini

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots + \frac{1}{(x-1)^n}$$

actu colligantur eorumque summa vocetur $\varDelta$, eiusdem seriei in infin continuatae summa erit $\varDelta + S$. Hoc modo olim[1]) summas talium serie infinitarum pro singulis exponentis n valoribus 2, 3, 4, 5 etc. ad plures fig decimales computavi sumto scilicet $x = 10$, quo pacto calculus satis exp absolvi poterat.

1) Vide Commentationem 47, § 31. *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I14, p. 121.

14. Quodsi igitur index x unitate augeatur, habebimus

$$S' = X' - X'' + X''' - X^{IV} + \text{etc.}$$

Addatur haec aequatio ad praecedentem, prodibitque aequatio fini

$$S + S' = X.$$

Quare per formulas differentiales habebimus

$$X = 2S + \partial S + \frac{1}{2}\partial\partial S + \frac{1}{6}\partial^3 S + \frac{1}{24}\partial^4 S + \text{etc.},$$

unde neglectis differentialibus erit $S = \frac{1}{2}X$, qui ergo erit prim
seriei quam quaerimus. Statuamus igitur

$$S = \frac{1}{2}X + \alpha\partial X + \beta\partial\partial X + \gamma\partial^3 X + \text{etc.}$$

et facta substitutione fiet

$$\begin{array}{rllllll}
2S = & X & + 2\alpha\partial X & + 2\beta\partial\partial X & + 2\gamma\partial^3 X & + 2\delta\partial^4 X & + \text{et} \\
\partial S = & & \frac{1}{2} & + \alpha & + \beta & + \gamma & + \text{et} \\
\frac{1}{2}\partial\partial S = & & & + \frac{1}{4} & + \frac{1}{2}\alpha & + \frac{1}{2}\beta & + \text{et} \\
\frac{1}{6}\partial^3 S = & & & & + \frac{1}{12} & + \frac{1}{6}\alpha & + \text{et} \\
\frac{1}{24}\partial^4 S = & & & & & + \frac{1}{48} & + \text{et}
\end{array}$$

etc.,

quae expressio tota soli X est aequanda.

15. Singulis igitur columnis verticalibus ad nihilum redactis orientur
entes aequalitates:

$$2\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad 2\beta + \alpha + \frac{1}{4} = 0, \quad 2\gamma + \beta + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{12} = 0,$$

$$2\delta + \gamma + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{48} = 0 \text{ etc.},$$

e priores saltem litterae has recipiunt determinationes:

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{48}, \quad \delta = 0 \text{ etc.}$$

16. Quo autem hos valores facilius investigemus, consideremus hanc seriem:

$$V = \frac{1}{2} + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.},$$

s scilicet summam V quaeri oporteat. Inde ergo sequentes derivemus series:

$$\begin{array}{rlllllll}
2V & = 1 + & 2\alpha z + & 2\beta zz + & 2\gamma z^3 + & 2\delta z^4 + & 2\varepsilon z^5 + & \text{etc.}, \\
Vz & = & + \frac{1}{2}z + & \alpha zz + & \beta z^3 + & \gamma z^4 + & \delta z^5 + & \text{etc.}, \\
\frac{1}{2}Vzz & = & & + \frac{1}{4} & + \frac{1}{2}\alpha & + \frac{1}{2}\beta & + \frac{1}{2}\gamma & + \text{etc.}, \\
\frac{1}{6}Vz^3 & = & & & + \frac{1}{12} & + \frac{1}{6}\alpha & + \frac{1}{6}\beta & + \text{etc.}, \\
\frac{1}{24}Vz^4 & = & & & & + \frac{1}{48} & + \frac{1}{24}\alpha & + \text{etc.}
\end{array}$$

etc.

un igitur serierum summa ob aequalitates ante allatas fiet $= 1$, sicque
bimus istam aequationem:

$$V\left(2 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \text{etc.}\right) = 1.$$

Quare cum sit

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \text{etc.},$$

erit manifesto

$$V(1 + e^z) = 1$$

sive

$$V = \frac{1}{1 + e^z},$$

unde fit

$$2V - 1 = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}.$$

17. Ponatur igitur ut ante

$$\frac{e^z - 1}{e^z + 1} = u,$$

ut sit

$$2V = 1 - u,$$

sitque iterum $z = 2t$, ita ut

$$u = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},$$

et facta evolutione erit

$$u = \frac{t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \frac{1}{5040}t^7 + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{720}t^6 + \text{etc.}}.$$

Unde patet seriei valorem ipsius u exprimentis primum terminu sequentes vero per potestates impares ipsius t progredi.

18. Cum igitur sit

$$u = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1},$$

erit

$$e^{2t} = \frac{1 + u}{1 - u}$$

ideoque

$$2t = l\frac{1 + u}{1 - u},$$

e differentiando fit

$$\partial t = \frac{\partial u}{1 - uu},$$

ut

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu - 1 = 0,$$

e est ipsa aequatio pro casu priore inventa. Neque tamen propterea pr
eadem series provenit. Quoniam enim hic primus seriei terminus debe
$= t$, fingenda est huiusmodi series:

$$u = t - \mathfrak{A}t^3 + \mathfrak{B}t^5 - \mathfrak{C}t^7 + \mathfrak{D}t^9 - \mathfrak{E}t^{11} + \text{etc.}$$

ique debebit facta substitutione

$$\begin{array}{rcccccccc}
\frac{\partial u}{\partial t} = & 1 & -3\mathfrak{A}tt & +5\mathfrak{B}t^4 & -7\mathfrak{C}t^6 & +9\mathfrak{D}t^8 & -11\mathfrak{E}t^{10} & + \text{etc.}, \\
uu = & & +1 & -2\mathfrak{A} & +2\mathfrak{B} & -2\mathfrak{C} & +2\mathfrak{D} & - \text{etc.} \\
 & & & & +\mathfrak{A}^2 & -2\mathfrak{A}\mathfrak{B} & +2\mathfrak{A}\mathfrak{C} & - \text{etc.} \\
 & & & & & & +\mathfrak{B}^2 & + \text{etc.} \\
 & & & & \text{etc.} & & & \\
-1 = & -1 & & & & & &
\end{array}$$

ue hinc sequentes oriuntur determinationes:

$$\begin{array}{lll}
3\mathfrak{A} = 1 & \text{ideoque} & \mathfrak{A} = \frac{1}{3}, \\
5\mathfrak{B} = 2\mathfrak{A} & \text{ideoque} & \mathfrak{B} = \frac{2}{5}\mathfrak{A} = \frac{2}{15}, \\
7\mathfrak{C} = 2\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^2 & \text{hinc} & \mathfrak{C} = \frac{2}{7}\mathfrak{B} + \frac{1}{7}\mathfrak{A}^2 = \frac{17}{315}, \\
9\mathfrak{D} = 2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} & \text{ergo} & \mathfrak{D} = \frac{2}{9}\mathfrak{C} + \frac{2}{9}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{62}{2835} \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

19. Cum igitur sit

$$V = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u,$$

si loco t restituamus $\frac{z}{2}$, pro V hanc reperiemus seriem:

$$V = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{16}\mathfrak{A}z^3 - \frac{1}{64}\mathfrak{B}z^5 + \frac{1}{256}\mathfrak{C}z^7 - \frac{1}{1024}\mathfrak{D}z^9 + \text{etc.}$$

Quare cum posuerimus

$$V = \frac{1}{2} + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 \text{ etc.},$$

hinc colligimus valores litterarum α, β, γ, δ etc., qui ergo erunt

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{16}\mathfrak{A}, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = -\frac{1}{64}\mathfrak{B}, \quad \zeta = 0, \quad \eta = \frac{1}{256}\mathfrak{C},$$

consequenter summa quaesita erit

$$S = \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}\partial X + \frac{1}{16}\mathfrak{A}\partial^3 X - \frac{1}{64}\mathfrak{B}\partial^5 X + \frac{1}{256}\mathfrak{C}\partial^7 X - \text{etc.}$$

20. Comparemus nunc istos coëfficientes cum iis, quos in casu
dente pro similibus differentialibus sumus adepti, qui erant $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{8}$
atque egregiam relationem inter utrosque deprehendemus, uti ex hoc
videre licet:

$$\begin{array}{l|l}
\partial X & \frac{1}{4} : \frac{A}{2} = 3 = 2^2 - 1, \\
\partial^3 X & \frac{\mathfrak{A}}{16} : \frac{B}{8} = 15 = 2^4 - 1, \\
\partial^5 X & \frac{\mathfrak{B}}{64} : \frac{C}{32} = 63 = 2^6 - 1, \\
\partial^7 X & \frac{\mathfrak{C}}{256} : \frac{D}{128} = 255 = 2^8 - 1, \\
\partial^9 X & \frac{\mathfrak{D}}{1024} : \frac{E}{512} = 1023 = 2^{10} - 1 \\
\text{etc.} & \qquad \text{etc.}
\end{array}$$

1. Per eosdem igitur numeros notissimos A, B, C, D etc. etiam hoc summa quaesita sequenti modo commodo exprimetur:

$$S = \frac{1}{2} X - (2^2 - 1)\frac{A}{2}\cdot \partial X + (2^4 - 1)\frac{B}{8}\cdot \partial^3 X - (2^6 - 1)\frac{C}{32}\cdot \partial^5 X$$

$$+ (2^8 - 1)\frac{D}{128}\cdot \partial^7 X - (2^{10} - 1)\frac{E}{512}\cdot \partial^9 X + \text{etc.},$$

seriem, quousque lubuerit, continuare licet.

DE SERIEBUS MEMORABILIBUS QUIBUS SINUS ET COSINUS ANGULORUM MULTIPLORUM EXPRIMERE LICET[1])

Conventui exhibuit die 13. Martii 1780

Commentatio 747 indicis ENESTROEMIANI

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 5 (1812), 1815, p. 57—72

1. Series, quas hic sum expositurus, non tam ob usum in multiplicati angulorum, quam ob eximia calculi artificia, quae me ad eas perduxer imprimis autem propter egregiam simplicitatem legis, qua earum termini grediuntur, omni attentione dignae videntur. Ad eas autem commodius vestigandas utor characteribus, quibus coëfficientes potestatum binomial designare soleo. Ita si x fuerit exponens potestatis, hi characteres seque habeant significationes:

$$\left(\frac{x}{1}\right)=x,\quad \left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x(x-1)}{1\cdot 2},\quad \left(\frac{x}{3}\right)=\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\quad \text{etc.}$$

sicque in genere erit

$$\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n}.$$

2. Proposito nunc angulo quocunque φ pro eius multiplo quocunque tales series secundum memoratos characteres procedentes indagabo, quae

1) Vide notam ad p. 542 vol. I_{14} adiectam et Commentationes ibi laudatas 686, 703, praesentis voluminis. C. B.

sinum quam sinum huius anguli multipli exprimant. Ac primo quidem
sinu istam fingo seriem:

$$\cos. x\varphi = 1 + \left(\frac{x}{1}\right) A + \left(\frac{x}{2}\right) B + \left(\frac{x}{3}\right) C + \left(\frac{x}{4}\right) D + \text{etc.},$$

ae semper abrumpitur, quoties x denotat numerum integrum positivu
liquis autem casibus in infinitum excurrit. Ad has autem litteras A, B,
etc. investigandas loco x successive assumo valores 1, 2, 3, 4 etc.,
uidem valores $\cos. \varphi$, $\cos. 2\varphi$, $\cos. 3\varphi$, $\cos. 4\varphi$ etc. tanquam cognitos spe

3. Facta igitur hac evolutione sequentes valores pro litteris A, B, C, D
perientur:

Si	erit
$x = 1$	$\cos. \varphi = 1 + A$,
	ergo
	$A = \cos. \varphi - 1$,
$x = 2$	$\cos. 2\varphi = 1 + 2A + B$,
	ergo
	$B = \cos. 2\varphi - 2\cos. \varphi + 1$,
$x = 3$	$\cos. 3\varphi = 1 + 3A + 3B + C$,
	ergo
	$C = \cos. 3\varphi - 3\cos. 2\varphi + 3\cos. \varphi - 1$,
$x = 4$	$\cos. 4\varphi = 1 + 4A + 6B + 4C + D$,
	ergo
	$D = \cos. 4\varphi - 4\cos. 3\varphi + 6\cos. 2\varphi - 4\cos. \varphi + 1$,
$x = 5$	$\cos. 5\varphi = 1 + 5A + 10B + 10C + 5D + E$,
	ergo
	$E = \cos. 5\varphi - 5\cos. 4\varphi + 10\cos. 3\varphi - 10\cos. 2\varphi + 5\cos. \varphi - 1$
etc.	etc.

4. Hinc ergo in genere, pro casu $x = n$, si littera coëfficienti fuerit N, sequitur fore

$$N = \cos. n\varphi - \left(\frac{n}{1}\right)\cos.(n-1)\varphi + \left(\frac{n}{2}\right)\cos.(n-2)\varphi - \left(\frac{n}{3}\right)\cos.(n$$

Nunc igitur praecipuum negotium huc redit, ut istius expression valor ad formulam finitam reducatur, id quod fit, si illius ser quae est N, elicuerimus. Quanquam autem plures iam huiusmo cundum cosinus procedentes sunt summatae, tamen methodi, qu ad eas investigandas sunt usi, vix ac ne vix quidem ad hunc ca modari posse videntur. Singularem igitur methodum hic propon ad hunc scopum perduxit.

5. Considero scilicet has binas formulas imaginarias:

$$p = \cos. \varphi + \sqrt{-1}\sin. \varphi \quad \text{et} \quad q = \cos. \varphi - \sqrt{-1}\sin. \varphi$$

ex quibus constat fore

$$p^n + q^n = 2\cos. n\varphi$$

ideoque

$$\cos. n\varphi = \frac{1}{2}(p^n + q^n).$$

Similique modo erit

$$\cos.(n-1)\varphi = \frac{1}{2}(p^{n-1} + q^{n-1})$$

et ita porro, quibus valoribus substitutis et potestatibus littera seorsim positis facta multiplicatione per 2 habebimus

$$2N = + p^n - \left(\frac{n}{1}\right)p^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)p^{n-2} - \left(\frac{n}{3}\right)p^{n-3} + \text{etc.}$$

$$+ q^n - \left(\frac{n}{1}\right)q^{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)q^{n-2} - \left(\frac{n}{3}\right)q^{n-3} + \text{etc.}$$

$$2N = (p-1)^n + (q-1)^n,$$

formulas ergo ulterius prosequi oportet.

6. Cum igitur sit

$$p = \cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi,$$

$$p - 1 = \cos.\varphi - 1 + \sqrt{-1}\sin.\varphi.$$

statuamus $\varphi = 2\omega$, et cum sit

$$\cos.\varphi = 1 - 2\sin.\omega^2 \quad \text{et} \quad \sin.\varphi = 2\sin.\omega\cos.\omega,$$

bimus

$$p - 1 = 2\sin.\omega\left(\sqrt{-1}\cos.\omega - \sin.\omega\right),$$

expressio reducitur ad hanc:

$$p - 1 = 2\sqrt{-1}\sin.\omega(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega).$$

li autem modo reperietur

$$q - 1 = -2\sqrt{-1}\sin.\omega(\cos.\omega - \sqrt{-1}\sin.\omega).$$

is igitur formulis conficietur

$$(p-1)^n = 2^n\left(\sqrt{-1}\right)^n\sin.\omega^n\left(\cos.n\omega + \sqrt{-1}\sin.n\omega\right),$$

$$(q-1)^n = 2^n\left(-\sqrt{-1}\right)^n\sin.\omega^n\left(\cos.n\omega - \sqrt{-1}\sin.n\omega\right),$$

um ergo formularum summa praebet valorem ipsius $2N$, quem quaerimus.

7. Potestates autem imaginariorum $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ modo fiunt modo -1, modo imaginariae $\pm\sqrt{-1}$, prout exponens n fuerit numer formae $4i$ vel $4i+1$ vel $4i+2$ vel $4i+3$, quandoquidem constat ess

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{4i} = +1; \quad \left(-\sqrt{-1}\right)^{4i} = +1,$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{4i+1} = \sqrt{-1}; \quad \left(-\sqrt{-1}\right)^{4i+1} = -\sqrt{-1},$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{4i+2} = -1; \quad \left(-\sqrt{-1}\right)^{4i+2} = -1,$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{4i+3} = -\sqrt{-1}; \quad \left(-\sqrt{-1}\right)^{4i+3} = +\sqrt{-1}.$$

8. Hac observatione praemissa tribuamus nunc successive expon valores 1, 2, 3, 4 etc., quo pacto N denotabit successive litteras A, B, C, quarum ergo valores sequenti modo per angulum $\omega = \frac{1}{2}\varphi$ expressos re mus. Sit igitur primo $n=1$, erit

$$2A = 2\sqrt{-1}\sin.\omega(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega)$$
$$- 2\sqrt{-1}\sin.\omega(\cos.\omega - \sqrt{-1}\sin.\omega),$$

qui ergo valor reducitur ad hanc formam:

$$2A = -4\sin.\omega\sin.\omega$$

ideoque

$$A = -2\sin.\omega\sin.\omega.$$

9. Sumto autem $n=2$ fiet

$$2B = -4\sin.\omega^2(\cos.2\omega + \sqrt{-1}\sin.2\omega)$$
$$-4\sin.\omega^2(\cos.2\omega - \sqrt{-1}\sin.2\omega),$$

unde colligitur

$$B = -4\sin.\omega^2\cos.2\omega.$$

10. Sit $n = 3$, eritque

$$2C = -8\sqrt{-1}\sin.\omega^3(\cos.3\omega + \sqrt{-1}\sin.3\omega)$$

$$+ 8\sqrt{-1}\sin.\omega^3(\cos.3\omega - \sqrt{-1}\sin.3\omega),$$

ex quo fit

$$C = 8\sin.\omega^3\sin.3\omega.$$

11. Sumatur $n = 4$, atque nanciscemur

$$2D = 16\sin.\omega^4(\cos.4\omega + \sqrt{-1}\sin.4\omega)$$

$$+ 16\sin.\omega^4(\cos.4\omega - \sqrt{-1}\sin.4\omega),$$

hincque oritur

$$D = 16\sin.\omega^4\cos.4\omega.$$

12. Sumto porro $n = 5$ fit

$$2E = 32\sqrt{-1}\sin.\omega^5(\cos.5\omega + \sqrt{-1}\sin.5\omega)$$

$$- 32\sqrt{-1}\sin.\omega^5(\cos.5\omega - \sqrt{-1}\sin.5\omega),$$

ergo colligendo prodit

$$E = -32\sin.\omega^5\sin.5\omega.$$

13. Pro casu $n = 6$ invenitur

$$2F = -64\sin.\omega^6(\cos.6\omega + \sqrt{-1}\sin.6\omega)$$

$$- 64\sin.\omega^6(\cos.6\omega - \sqrt{-1}\sin.6\omega),$$

sive

$$F = -64\sin.\omega^6\cos.6\omega.$$

14. Statuatur porro $n = 7$, eritque

$$2G = -128\sqrt{-1}\,\sin.\omega^7(\cos.7\omega + \sqrt{-1}\,\sin.7\omega)$$
$$+128\sqrt{-1}\,\sin.\omega^7(\cos.7\omega - \sqrt{-1}\,\sin.7\omega)$$

ideoque

$$G = +128\,\sin.\omega^7\,\sin.7\omega.$$

15. Denique posito $n = 8$ prodit

$$2H = +256\,\sin.\omega^8(\cos.8\omega + \sqrt{-1}\,\sin.8\omega)$$
$$+256\,\sin.\omega^8(\cos.8\omega - \sqrt{-1}\,\sin.8\omega),$$

hincque

$$H = +256\,\sin.\omega^8\cos.8\omega.$$

16. Istos igitur valores per periodos quadripartitas progredien
quentibus duabus columnis iunctim repraesentemus:

$$\begin{array}{ll}
A = -2\,\sin.\omega\,\sin.\ \omega, & B = -2^2\,\sin.\omega^2\,\cos.\ 2\omega, \\
C = +2^3\sin.\omega^3\sin.3\omega, & D = +2^4\,\sin.\omega^4\,\cos.\ 4\omega, \\
E = -2^5\sin.\omega^5\sin.5\omega, & F = -2^6\,\sin.\omega^6\,\cos.\ 6\omega, \\
G = +2^7\sin.\omega^7\sin.7\omega, & H = +2^8\,\sin.\omega^8\,\cos.\ 8\omega, \\
I = -2^9\sin.\omega^9\sin.9\omega, & K = -2^{10}\sin.\omega^{10}\cos.10\omega
\end{array}$$
etc.;

consequenter valor formulae propositae, scilicet $\cos.x\varphi$ sive $\cos.2$
quentem seriem satis concinnam exprimetur:

$$\cos.2x\omega = \left\{\begin{array}{l}
1 - \quad 2\left(\frac{x}{1}\right)\sin.\omega\ \sin.\ \omega - \quad 4\left(\frac{x}{2}\right)\sin.\omega^2\cos.2 \\
+ \quad 8\left(\frac{x}{3}\right)\sin.\omega^3\sin.3\omega + 16\left(\frac{x}{4}\right)\sin.\omega^4\cos.4 \\
- \ 32\left(\frac{x}{5}\right)\sin.\omega^5\sin.5\omega - \ 64\left(\frac{x}{6}\right)\sin.\omega^6\cos.6 \\
+128\left(\frac{x}{7}\right)\sin.\omega^7\sin.7\omega + 256\left(\frac{x}{8}\right)\sin.\omega^8\cos.8 \\
\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}\right.$$

7. Antequam hanc formulam maxime generalem ad casus particulares ...nodemus, observationem prorsus singularem eamque maximi momenti ...lium attulisse operae pretium est inde petitam, quod per evolutionem ...mem sit

$$\cos. x\varphi = 1 - \frac{1}{2} x^2\varphi^2 + \frac{1}{24} x^4\varphi^4 - \frac{1}{720} x^6\varphi^6 + \text{etc.},$$

...ntum potestates pares ipsius x occurrunt; quam ob rem necesse est, ut ...stra serie inventa facta evolutione characterum $\left(\frac{x}{n}\right)$ omnes termini po-...bus imparibus ipsius x affecti seorsim se mutuo destruant; quare etiam ... termini inde resultantes sola littera x affecti iunctimque sumti nihilo ...i debebunt, unde istos terminos ex singulis characteribus oriundos hic ...amus:

$$\ldots) \text{ dat } + x, \quad \left(\frac{x}{2}\right) \text{ dat } -\frac{1}{2}x, \quad \left(\frac{x}{3}\right) \text{ dat } +\frac{1}{3}x, \quad \left(\frac{x}{4}\right) \text{ dat } -\frac{1}{4}x,$$

$$\ldots) \;\cdot\;\cdot\; +\frac{1}{5}x, \quad \left(\frac{x}{6}\right) \;\cdot\;\cdot\; -\frac{1}{6}x, \quad \left(\frac{x}{7}\right) \;\cdot\;\cdot\; +\frac{1}{7}x, \quad \left(\frac{x}{8}\right) \;\cdot\;\cdot\; -\frac{1}{8}x,$$

$$\ldots) \;\cdot\;\cdot\; +\frac{1}{9}x, \quad \left(\frac{x}{10}\right) \;\cdot\;\cdot\; -\frac{1}{10}x, \quad \left(\frac{x}{11}\right) \;\cdot\;\cdot\; +\frac{1}{11}x, \quad \left(\frac{x}{12}\right) \;\cdot\;\cdot\; -\frac{1}{12}x$$

etc.

8. Colligamus igitur omnes istos terminos ac dividendo per x pervenie-...d sequentem seriem maxime memorabilem:

$$0 = -2\sin.\omega\sin.\omega + \frac{1}{2}\cdot 2^2\sin.\omega^2\cos.2\omega + \frac{1}{3}\cdot 2^3\sin.\omega^3\sin.3\omega$$

$$\ldots\frac{1}{4}\cdot 2^4\sin.\omega^4\cos.4\omega - \frac{1}{5}\cdot 2^5\sin.\omega^5\sin.5\omega + \frac{1}{6}\cdot 2^6\sin.\omega^6\cos.6\omega + \text{etc.},$$

...duas series inter se aequales deducimus, quae sunt

$$2\sin.\omega\sin.\omega - \frac{1}{3}\cdot 2^3\sin.\omega^3\sin.3\omega + \frac{1}{5}\cdot 2^5\sin.\omega^5\sin.5\omega - \text{etc.}$$

$$\ldots\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin.\omega^2\cos.2\omega - \frac{1}{4}\cdot 2^4\sin.\omega^4\cos.4\omega + \frac{1}{6}\cdot 2^6\sin.\omega^6\cos.6\omega - \text{etc.}$$

...ergo pulcherrimum theorema condi potest:

THEOREMA

Denotante ω angulum quemcunque duae sequentes series

$$s = \frac{2}{1}\sin.\omega\ \sin.\ \omega - \frac{2^3}{3}\sin.\omega^3\sin.3\omega + \frac{2^5}{5}\sin.\omega^5\sin.5\omega - \text{etc.}$$

$$t = \frac{2^2}{2}\sin.\omega^2\cos.2\omega - \frac{2^4}{4}\sin.\omega^4\cos.4\omega + \frac{2^6}{6}\sin.\omega^6\cos.6\omega - \text{etc.}$$

semper erunt inter se aequales, sive erit $s = t$.

DEMONSTRATIO

19. Hic ubique loco $2\sin.\omega$ scribamus litteram b, ut sit

$$s = \frac{b\sin.\omega}{1} - \frac{b^3\sin.3\omega}{3} + \frac{b^5\sin.5\omega}{5} - \frac{b^7\sin.7\omega}{7} + \text{etc.},$$

$$t = \frac{b^2\cos.2\omega}{2} - \frac{b^4\cos.4\omega}{4} + \frac{b^6\cos.6\omega}{6} - \frac{b^8\cos.8\omega}{8} + \text{etc.},$$

quarum serierum summas investigemus nullo habito respectu ad re quae inter litteras b et ω intercedit, quam ob rem nihil impediet, c littera b tanquam constans spectetur; utriusque autem summa inven restituemus valorem assumtum $2\sin.\omega$, atque videbimus hoc casu futurum esse $t = s$.

20. Incipiamus igitur a serie priore, de qua observemus sumt $\omega = 0$ fore etiam $s = 0$, atque differentiata hac serie reperiemus for

$$\frac{\partial s}{\partial\omega} = b\cos.\omega - b^3\cos.3\omega + b^5\cos.5\omega - b^7\cos.7\omega + \text{etc.},$$

quae multiplicetur per $1 + 2bb\cos.2\omega + b^4$; atque ob

$$2\cos.2\omega\cos.n\omega = \cos.(n+2)\omega + \cos.(n-2)\omega$$

obtinebimus sequentem aequationem:

$$\frac{\partial s}{\partial \omega}(1 + 2bb\cos.2\omega + b^4)$$

$$\begin{aligned}
= b\cos.\omega - b^3\cos.3\omega + b^5\cos.5\omega - b^7\cos.7\omega + b^9\cos.9\omega - \text{etc.}\\
+ b^3\cos.3\omega - b^5\cos.5\omega + b^7\cos.7\omega - b^9\cos.9\omega + \text{etc.}\\
+ b^3\cos.\ \omega - b^5\cos.\ \omega + b^7\cos.3\omega - b^9\cos.5\omega + \text{etc.}\\
+ b^5\cos.\ \omega - b^7\cos.3\omega + b^9\cos.5\omega - \text{etc.},
\end{aligned}$$

us terminis collectis nanciscimur

$$\frac{\partial s}{\partial \omega}(1 + 2bb\cos.2\omega + b^4) = b\cos.\omega + b^3\cos.\omega = b(1 + bb)\cos.\omega$$

o erit

$$\partial s = \frac{b(1 + bb)\,\partial\omega\cos.\omega}{1 + 2bb\cos.2\omega + b^4}.$$

21. Simili modo tractemus alteram seriem, de qua notasse iuvabit sumto
0 fore

$$t = \frac{1}{2}l(1 + bb),$$

sit

$$t = \frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^6}{6} - \frac{b^8}{8} + \text{etc.}$$

a iam differentiatione prodibit

$$\frac{\partial t}{\partial \omega} = -bb\sin.2\omega + b^4\sin.4\omega - b^6\sin.6\omega + \text{etc.}$$

iam iterum utrinque multiplicetur per $1 + 2bb\cos.2\omega + b^4$ et calculus ita
netur:

$$\begin{aligned}
1\cdot\frac{\partial t}{\partial \omega} &= -bb\sin.2\omega + b^4\sin.4\omega - b^6\sin.6\omega + b^8\sin.8\omega - \text{etc.},\\
2b^2\cos.2\omega\cdot\frac{\partial t}{\partial \omega} &= \qquad - b^4\sin.4\omega + b^6\sin.6\omega - b^8\sin.8\omega + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad + b^6\sin.2\omega - b^8\sin.4\omega + \text{etc.}\\
+ b^4\cdot\frac{\partial t}{\partial \omega} &= \qquad\qquad - b^6\sin.2\omega + b^8\sin.4\omega - \text{etc.},
\end{aligned}$$

unde collectis membris nascitur haec aequatio:

$$\frac{\partial t}{\partial \omega}(1 + 2bb\cos.2\omega + b^4) = -bb\sin.2\omega;$$

consequenter erit

$$\partial t = -\frac{bb\partial\omega\sin.2\omega}{1 + 2bb\cos.2\omega + b^4}.$$

22. Inventis his duabus formulis differentialibus utriusque investigemus, ac pro priore quidem ob

$$\partial\omega\cos.\omega = \partial\cdot\sin.\omega$$

habebimus

$$\partial s = \frac{b(1+bb)\partial\cdot\sin.\omega}{1 + 2bb\cos.2\omega + b^4},$$

quae expressio ob

$$\cos.2\omega = 1 - 2\sin.\omega^2$$

transformatur in hanc

$$\partial s = \frac{b(1+bb)\partial\cdot\sin.\omega}{(1+bb)^2 - 4bb\sin.\omega^2}.$$

Quia vero constat esse

$$\int\frac{\partial z}{ff - ggzz} = \frac{1}{2fg}\,l\,\frac{f+gz}{f-gz},$$

nostro autem casu sit $f = 1 + bb$ et $g = 2b$ et $z = \sin.\omega$, integrale:

$$s = \frac{1}{4}\,l\,\frac{1 + bb + 2b\sin.\omega}{1 + bb - 2b\sin.\omega},$$

quae formula casu $\omega = 0$ evanescit ideoque constantis additio

23. Pro altera formula ob

$$-\partial\omega\sin.2\omega = \frac{1}{2}\partial\cdot\cos.2\omega$$

ubi numerator aequatur quartae parti differentialis denominatoris, unde
grale erit

$$t = \frac{1}{4} l(1 + 2bb \cos. 2\omega + b^4).$$

Necesse autem est, ut posito $\omega = 0$ fiat

$$t = \frac{1}{2} l(1 + bb),$$

atque commode hic evenit, ut isto casu idem valor prodeat, sicque adic
constantis non est opus. Notasse autem hic iuvabit esse etiam

$$t = \frac{1}{4} l(1 + bb + 2b \sin. \omega) + \frac{1}{4} l(1 + bb - 2b \sin. \omega).$$

24. His iam integralibus inventis ob

$$s = \frac{1}{4} l(1 + bb + 2b \sin. \omega) - \frac{1}{4} l(1 + bb - 2b \sin. \omega)$$

erit eorum differentia

$$t - s = \frac{1}{2} l(1 + bb - 2b \sin. \omega).$$

At vero pro casu nostri theorematis est $b = 2 \sin. \omega$, quo valore subs
prodit $t - s = \frac{1}{2} l1 = 0$, quae est demonstratio nostri theorematis.

EXEMPLUM 1

25. Contemplemur nunc etiam nonnullos casus particu[l...] quidem, si sumeremus $\omega = 180^0$, omnes plane termini in [...] Quamobrem incipiamus a casu $\omega = 90^0 = \frac{\pi}{2}$, ubi ergo erit

$$\cos. 2\omega = -1, \quad \cos. 4\omega = +1, \quad \cos. 6\omega = -1, \quad \cos. 8\omega = \ldots$$

$$\sin. \ \omega = +1, \quad \sin. 3\omega = -1, \quad \sin. 5\omega = +1, \quad \sin. 7\omega \ldots$$

quamobrem series pro $\cos. x\pi$ inventa erit

$$\cos. x\pi = 1 - 2\left(\frac{x}{1}\right) + 4\left(\frac{x}{2}\right) - 8\left(\frac{x}{3}\right) + 16\left(\frac{x}{4}\right) - 32\left(\frac{x}{5}\right) \ldots$$

quae series manifesto nascitur ex evolutione potestatis $(1-2)$[...] valores sunt alternatim $+1$ et -1, id quod egregie conven[...] $\cos. x\pi$, siquidem ipsi x tribuantur numeri integri.

26. Hoc autem casu binae illae series, quas inter se ae[...] invenimus, erunt

$$2 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{1}{7} \cdot 2^7 + \text{etc.} = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{6} \ldots$$

Cum autem haec series maxime sit divergens, nullum cons[...] cum veritate expectare licet, quod quidem maxime paradoxon [...] novimus utique dari eiusmodi series divergentes omnes ter[...] habentes, quarum summa tamen non solum sit nulla sed adc[...] torum veritas in superiore theoremate iam solidissime est de[...]

EXEMPLUM 2

27. Sumatur nunc $\omega = 60^0 = \frac{\pi}{3}$, erit $2 \sin. \omega = b = \sqrt{3}$, [...] Tum vero erit

$$\sin. 3\omega = 0, \quad \sin. 5\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin. 7\omega = +\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin. 9\omega \ldots$$

$$\cos. 2\omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos. 4\omega = -\frac{1}{2}, \quad \cos. 6\omega = 1, \quad \cos. 8\omega = \ldots$$

ergo sequentem nanciscimur seriem[1]):

$$\cos.\frac{2\pi x}{3} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{1}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{27}{2}\left(\frac{x}{5}\right) - 27\left(\frac{x}{6}\right)$$

$$+ \frac{81}{2}\left(\frac{x}{7}\right) - \frac{81}{2}\left(\frac{x}{8}\right) + \text{etc.}$$

autem binae series pro s et t inventae hoc casu erunt

$$s = \frac{3}{2} - \frac{27}{2\cdot 5} - \frac{81}{2\cdot 7} + \frac{729}{2\cdot 11} + \frac{2187}{2\cdot 13} - \text{etc.}$$

$$2s = 3^1 - \frac{3^3}{5} - \frac{3^4}{7} + \frac{3^6}{11} + \frac{3^7}{13} - \frac{3^9}{17} - \frac{3^{10}}{19} + \text{etc.},$$

vero

$$t = -\frac{3}{2\cdot 2} + \frac{9}{2\cdot 4} + \frac{27}{1\cdot 6} + \frac{81}{2\cdot 8} - \frac{243}{2\cdot 10} - \frac{729}{1\cdot 12} - \text{etc.}$$

$$2t = -\frac{3^1}{2} + \frac{3^2}{4} + \frac{3^3}{3} + \frac{3^4}{8} - \frac{3^5}{10} - \frac{3^6}{6} - \text{etc.},$$

ergo duae series certe sunt aequales, etiamsi hoc absurdum videri queat, rei causa in eo est quaerenda, quod hae series sunt divergentes.

EXEMPLUM 3

28. Sumatur $\omega = 45^0 = \frac{\pi}{4}$, eritque $\sin.\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ideoque $b = \sqrt{2}$. Porro notetur esse

$$\sin.3\omega = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin.5\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin.7\omega = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin.9\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{etc.},$$

$$\cos.2\omega = 0,\quad \cos.4\omega = -1,\quad \cos.6\omega = 0,\quad \cos.8\omega = +1\ \text{etc.},$$

1) Editio princeps:

$$\ldots x = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{1}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{27}{2}\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{27}{2}\left(\frac{x}{6}\right) + \frac{81}{2}\left(\frac{x}{7}\right) - \frac{81}{2}\left(\frac{x}{8}\right) + \text{etc.}$$ G. B.

unde series nostra principalis erit

$$\cos.\frac{\pi x}{2}=1-\left(\frac{x}{1}\right)+2\left(\frac{x}{3}\right)-4\left(\frac{x}{4}\right)+4\left(\frac{x}{5}\right)-8\left(\frac{x}{7}\right)+$$

Haec autem series adhuc est divergens. Illae autem duae aequales esse ostendimus, ita se habebunt:

$$s=1-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{8}{7}+\frac{16}{9}-\frac{32}{11}-\frac{64}{13}$$

$$t=\frac{4}{4}-\frac{16}{8}+\frac{64}{12}-\frac{256}{16}+\frac{1024}{20}-\frac{4096}{24}+\frac{16384}{28}$$

sive

$$s=1-\frac{2}{3}-\frac{2^2}{5}+\frac{2^3}{7}+\frac{2^4}{9}-\frac{2^5}{11}-\frac{2^6}{13}+\text{etc.}$$

$$t=\frac{4}{4}-\frac{4^2}{8}+\frac{4^3}{12}-\frac{4^4}{16}+\frac{4^5}{20}-\frac{4^6}{24}+\frac{4^7}{28}-\text{etc.}$$

ubi nihil absoni occurit.

EXEMPLUM 4

29. Sit denique $\omega=30^0=\frac{\pi}{6}$, unde ob $\sin.\omega=\frac{1}{2}$ orit casus ad series convergentes perducet. Est vero

$$\sin.3\omega=1,\quad \sin.5\omega=\frac{1}{2},\quad \sin.7\omega=-\frac{1}{2},\quad \sin.9\omega=-1,$$

$$\cos.2\omega=\frac{1}{2},\quad \cos.4\omega=-\frac{1}{2},\quad \cos.6\omega=-1,\quad \cos.8\omega=-\frac{1}{2},$$

etc.

Hinc ergo nostra series erit

$$\cos.\frac{\pi x}{3}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{5}\right)+$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{8}\right)+\left(\frac{x}{9}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{10}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{11}\right)+\text{etc.},$$

ae expressio commode in ternas sequentes series decomponitur:

$$\cos.\frac{\pi x}{3} = \left\{\begin{array}{r} 1\left(1 + \binom{x}{3} + \binom{x}{6} + \binom{x}{9} + \binom{x}{12} + \text{etc.}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\binom{x}{1} + \binom{x}{4} + \binom{x}{7} + \binom{x}{10} + \binom{x}{13} + \text{etc.}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\binom{x}{2} + \binom{x}{5} + \binom{x}{8} + \binom{x}{11} + \binom{x}{14} + \text{etc.}\right) \end{array}\right\}$$

uae autem series s et t hoc casu erunt

$$s = \frac{1}{2\cdot 1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{2\cdot 7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2\cdot 11} + \frac{1}{2\cdot 13} - \text{etc.}$$

$$t = \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2\cdot 8} + \frac{1}{2\cdot 10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{2\cdot 14} + \text{etc.}$$

nc ergo erit

$$2(s - t) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{2}{12} + \text{etc.}$$

ncque seriem, cuius summa est $= 0$, hoc modo in tres series resolvere licet:

$$0 = \left\{\begin{array}{r} \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \text{etc.} \\ -1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \text{etc.}\right) \\ -2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} - \text{etc.}\right) \end{array}\right\}$$

30. Eodem plane modo, quo supra seriem pro $\cos. 2x\omega$ investigavimus, m series pro sinu eiusdem anguli multipli eruitur sequenti modo. Finga- ut supra, haec series:

$$\sin. x\varphi = \binom{x}{1}A + \binom{x}{2}B + \binom{x}{3}C + \text{etc.},$$

quae semper abrumpitur, quoties x denotat numerum integrum p
Evolvendo autem, ut iam supra fecimus, litterae A, B, C etc. ita re
expressae, ut facile pateat characteri $\left(\frac{x}{n}\right)$ respondere seriem

$$N = \sin. n\varphi - \binom{n}{1} \sin. (n-1)\varphi + \binom{n}{2} \sin. (n-2)\varphi - \text{etc.}$$

postremo membro existente $\pm \sin. 0\varphi$.

31. Cum iam sit

$$\sin. \lambda\varphi = \frac{p^\lambda - q^\lambda}{2\sqrt{-1}},$$

erit

$$2N\sqrt{-1} = \begin{cases} + p^n - \binom{n}{1} p^{n-1} + \binom{n}{2} p^{n-2} - \text{etc.} = \quad (p-1)^n \\ - q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} - \binom{n}{2} q^{n-2} + \text{etc.} = -(q-1)^n \end{cases}$$

At vero ex superioribus manifestum est fore

$$p - 1 = \quad 2 \sin. \omega \sqrt{-1} (\cos. \omega + \sqrt{-1} \sin. \omega),$$

$$q - 1 = -2 \sin. \omega \sqrt{-1} (\cos. \omega - \sqrt{-1} \sin. \omega)$$

ideoque

$$2N\sqrt{-1} = (\quad 2 \sin. \omega \sqrt{-1})^n (\cos. n\omega + \sqrt{-1} \sin. n\omega)$$

$$- (-2 \sin. \omega \sqrt{-1})^n (\cos. n\omega - \sqrt{-1} \sin. n\omega),$$

ubi notandum pro quatuor formis, quas littera n habere potest, fore:

$$\begin{aligned} &\text{Si } n = 4i, & N &= \quad (2 \sin. \omega)^n \sin. n\omega, \\ &\;.\,.\; n = 4i + 1, & N &= \quad (2 \sin. \omega)^n \cos. n\omega, \\ &\;.\,.\; n = 4i + 2, & N &= -(2 \sin. \omega)^n \sin. n\omega, \\ &\;.\,.\; n = 4i + 3, & N &= -(2 \sin. \omega)^n \cos. n\omega. \end{aligned}$$

32. Quodsi igitur successive litterae n tribuantur valores 1, 2, 3, 4 etc., erit

$$\begin{aligned}
A &= +2 \sin.\omega \cos.\omega, & B &= -2^2 \sin.\omega^2 \sin.2\omega, \\
C &= -2^3 \sin.\omega^3 \cos.3\omega, & D &= +2^4 \sin.\omega^4 \sin.4\omega, \\
E &= +2^5 \sin.\omega^5 \cos.5\omega, & F &= -2^6 \sin.\omega^6 \sin.6\omega, \\
G &= -2^7 \sin.\omega^7 \cos.7\omega, & H &= +2^8 \sin.\omega^8 \sin.8\omega
\end{aligned}$$

etc.;

sequenter series quaesita pro sinu restituto loco φ valore 2ω ita se habebit:

$$\sin.2x\omega = \left\{\begin{array}{l}
+ 2\binom{x}{1}\sin.\omega \cos.\omega - 4\binom{x}{2}\sin.\omega^2 \sin.2\omega \\
- 8\binom{x}{3}\sin.\omega^3 \cos.3\omega + 16\binom{x}{4}\sin.\omega^4 \sin.4\omega \\
+ 32\binom{x}{5}\sin.\omega^5 \cos.5\omega - 64\binom{x}{6}\sin.\omega^6 \sin.6\omega \\
- 128\binom{x}{7}\sin.\omega^7 \cos.7\omega + 256\binom{x}{8}\sin.\omega^8 \sin.8\omega \\
\text{etc.}
\end{array}\right\}$$

COMMENTATIO IN FRACTIONEM CONTINUAM QUA ILLUSTRIS LA GRANGE POTESTA BINOMIALES EXPRESSIT[1]

Conventui exhibuit die 20. Martii 1780

Commentatio 750 indicis ENESTROEMIANI

Mémoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 6 (1813/14), 181

1. Iste vir illustris hanc potestatem binomialem $(1+x)^n$ m singulari ex eius differentiali logarithmico in hanc fractionem vertit:

$$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(1-n)x}{2 + \cfrac{(1+n)x}{3 + \cfrac{(2-n)x}{2 + \cfrac{(2+n)x}{5 + \cfrac{(3-n)x}{2 + \cfrac{(3+n)x}{7 + \text{etc.}}}}}}}}$$

quae expressio hac insigni proprietate gaudet, ut, quoties exp numerus integer, sive positivus sive negativus, abrumpatur finitam redigatur.

1) Vide LAGRANGE, J.-L., *Sur l'usage des fractions continues dans le c* (*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de B* *Oeuvres de* LAGRANGE, Tome quatrième, Paris 1869, p. 301—332.

2. Quoniam haec fractio continua non lege uniformi, sed interrupta, pr
reditur, eam ad legem uniformem revocemus, id quod commodissime fiet,
un sequenti modo per partes repraesentemus:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{A},$$

$$A = 1 + \cfrac{(1-n)x}{2 + \cfrac{(1+n)x}{B}},$$

$$B = 3 + \cfrac{(2-n)x}{2 + \cfrac{(2+n)x}{C}},$$

$$C = 5 + \cfrac{(3-n)x}{2 + \cfrac{(3+n)x}{D}},$$

$$D = 7 + \cfrac{(4-n)x}{2 + \cfrac{(4+n)x}{E}},$$

etc.

Hinc igitur per reductionem habebimus

$$A = 1 + \frac{(1-n)Bx}{2B+(1+n)x} = 1 + \frac{(1-n)x}{2} - \frac{(1-nn)xx:2}{2B+(1+n)x}$$
$$= 1 + \frac{(1-n)x}{2} + \frac{(nn-1)xx:4}{B+\left(\frac{1+n}{2}\right)x}.$$

nili modo erit

$$B = 3 + \frac{(2-n)Cx}{2C+(2+n)x} = 3 + \frac{(2-n)x}{2} - \frac{(4-nn)xx:2}{2C+(2+n)x}$$
$$= 3 + \frac{(2-n)x}{2} + \frac{(nn-4)xx:4}{C+\left(\frac{2+n}{2}\right)x}.$$

odem modo habebimus

$$C = 5 + \frac{(3-n)Dx}{2D+(3+n)x} = 5 + \frac{(3-n)x}{2} - \frac{(9-nn)xx:2}{2D+(3+n)x}$$
$$= 5 + \frac{(3-n)x}{2} + \frac{(nn-9)xx:4}{D+\left(\frac{3+n}{2}\right)x}$$

ita porro.

3. Quodsi iam hos valores ordine loco A, B, C etc. substituam
tio continua sequentem induet formam:

$$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(1-n)x}{2} + \cfrac{(nn-1)xx:4}{3(1+\frac{1}{2}x) + \cfrac{(nn-4)xx:4}{5(1+\frac{1}{2}x) + \cfrac{(nn-9)xx:4}{7(1+\frac{1}{2}x) + \cfrac{(nn-}{}}}}}$$

4. Quo hinc fractiones partiales abigamus, statuamus $x = 2y$,
ciscamur hanc expressionem:

$$(1+2y)^n = 1 + \cfrac{2ny}{1 + (1-n)y + \cfrac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \cfrac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \cfrac{(nn-9)yy}{7(1+y) + \text{et}}}}}$$

quae forma facile transmutatur in hanc:

$$\frac{2ny}{(1+2y)^n - 1} = 1 + (1-n)y + \cfrac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \cfrac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \text{etc.}}}$$

Addatur utrinque ny, ut producat

$$\frac{ny(1+(1+2y)^n)}{(1+2y)^n - 1} = 1 + y + \cfrac{(nn-1)yy}{3(1+y) + \cfrac{(nn-4)yy}{5(1+y) + \text{etc.}}}$$

quae expressio iam ordine satis regulari procedit.

5. Dividamus iam utrinque per $1+y$, et membrum sinistrum ev

$$\frac{ny}{1+y} \cdot \frac{(1+2y)^n + 1}{(1+2y)^n - 1}.$$

Ex parte dextra autem singulae fractiones supra et infra per $1+y$
tur prodibitque haec forma:

$$1 + \cfrac{(nn-1)yy:(1+y)^2}{3 + \cfrac{(nn-4)yy:(1+y)^2}{5 + \cfrac{(nn-9)yy:(1+y)^2}{7 + \cfrac{(nn-16)yy:(1+y)^2}{9 + \cfrac{(nn-25)yy:(1+y)^2}{11 + \text{etc.}}}}}}$$

6. Hanc igitur expressionem denuo ad maiorem concinnitatem reduc statuendo $\frac{y}{1+y}=z$, ita ut sit $y=\frac{z}{1-z}$. Hoc autem modo membrum strum ob

$$1+2y=\frac{1+z}{1-z}$$

accipiet hanc formam:

$$\frac{nz[(1+z)^n+(1-z)^n]}{(1+z)^n-(1-z)^n},$$

quod ergo aequabitur huic fractioni continuae:

$$1+\cfrac{(nn-1)zz}{3+\cfrac{(nn-4)zz}{5+\cfrac{(nn-9)zz}{7+\cfrac{(nn-16)zz}{9+\text{etc.}}}}}$$

quae, ob elegantiam, summam attentionem meretur.

7. Nunc igitur per se manifestum est istam expressionem semper al abrumpi, quoties n fuerit numerus integer, sive positivus sive negat Evidens autem est etiam membrum sinistrum eundem valorem retinere iamsi pro n scribatur $-n$. Hoc enim facto evadet

$$\frac{-nz[(1+z)^{-n}+(1-z)^{-n}]}{(1+z)^{-n}-(1-z)^{-n}},$$

quae fractio, si supra et infra per $(1-zz)^n$ multiplicetur, induet hanc form

$$\frac{-nz[(1-z)^n+(1+z)^n]}{(1-z)^n-(1+z)^n}=\frac{nz[(1+z)^n+(1-z)^n]}{(1+z)^n-(1-z)^n},$$

quae est ipsa expressio praecedens. Sicque perinde est, sive litterae n positivus sive negativus tribuatur.

8. Ita si sumamus $n=\pm 1$, fit membrum sinistrum $=1$, qui etiam valor dextri. Porro posito $n=\pm 2$ membrum sinistrum evadit $=1$ membrum vero dextrum fit etiam $=1+zz$. Simili modo sumto $n=$ pars sinistra, ut et dextra, fiunt $\frac{3(1+3zz)}{3+zz}$.

9. Hinc autem nonnullas conclusiones maximi momen
prouti exponenti n tribuatur valor vel evanescens vel in
autem casus, quo litterae z datur valor imaginarius, perd
conclusionem, quandoquidem ipsa fractio continua nihilomi
a qua igitur conclusione initium sumamus.

CONCLUSIO I

QUA $z = t\sqrt{-1}$

10. Hoc igitur casu fractio continua hanc habebit form

$$1 - \cfrac{(nn-1)tt}{3 - \cfrac{(nn-4)tt}{5 - \cfrac{(nn-9)tt}{7 - \cfrac{(nn-16)tt}{9 - \text{etc.}}}}}$$

at vero pars sinistra nunc erit

$$\frac{nt\sqrt{-1}\,[(1+t\sqrt{-1})^n + (1-t\sqrt{-1})^n]}{(1+t\sqrt{-1})^n - (1-t\sqrt{-1})^n},$$

quae non obstantibus partibus imaginariis certe habere debe
quem ergo hic investigemus. Hunc in finem ponamus $t =$
$t = \text{tang.}\,\varphi$; tum igitur erit

$$(1+t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi)^n}{\cos.\varphi^n} = \frac{\cos.n\varphi + \sqrt{-\ldots}}{\cos.\varphi\ldots}$$

similique modo

$$(1-t\sqrt{-1})^n = \frac{(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi)^n}{\cos.\varphi^n} = \frac{\cos.n\varphi - \sqrt{-\ldots}}{\cos.\varphi^n\ldots}$$

His igitur valoribus substitutis nostrum membrum sinistrum

$$\frac{2n\sqrt{-1}\cdot\text{tg.}\,\varphi\cos.n\varphi}{2\sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi} = \frac{n\,\text{tg.}\,\varphi\cos.n\varphi}{\sin.n\varphi} = \frac{n\,\text{tg.}\,\varphi}{\text{tg.}\,n\varphi}\ldots$$

$$\frac{nt}{\operatorname{tg.} n\varphi} = 1 - \cfrac{(nn-1)tt}{3 - \cfrac{(nn-4)tt}{5 - \cfrac{(nn-9)tt}{7 - \text{etc.}}}}$$

gitur hoc modo repraesentari poterit:

$$\operatorname{tg.} n\varphi = \cfrac{nt}{1 - \cfrac{(nn-1)tt}{3 - \cfrac{(nn-4)tt}{5 - \cfrac{(nn-9)tt}{7 - \text{etc.}}}}}$$

rgo expressio commode adhiberi potest ad tangentes angulorum multi- per tangentem anguli simplicis t exprimendas. Ita si fuerit $n = 2$, mus

$$\operatorname{tg.} 2\varphi = \frac{2t}{1 - tt}.$$

modo si $n = 3$, erit

$$\operatorname{tg.} 3\varphi = \cfrac{3t}{1 - \cfrac{8tt}{3 - tt}} = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt}.$$

c casus maxime notabilis se offert quando exponens n accipitur in- arvus; tum enim erit $\operatorname{tg.} n\varphi = n\varphi$, ergo utrinque per n dividendo ista forma:

$$\varphi = \cfrac{t}{1 + \cfrac{tt}{3 + \cfrac{4tt}{5 + \cfrac{9tt}{7 + \text{etc.}}}}}$$

ctione continua per tangentem t ipse angulus exprimitur.

Consideremus nunc casum, quo exponens n accipitur infinite magnus angulus φ infinite parvus ideoque etiam eius tangens t infinite parva,

ita tamen, ut sit $n\varphi = \theta$ ideoque etiam $nt = \theta$; tum igitur
fractionem continuam[1]):

$$\operatorname{tg}.\theta = \cfrac{\theta}{1 - \cfrac{\theta\theta}{3 - \cfrac{\theta\theta}{5 - \cfrac{\theta\theta}{7 - \text{etc.}}}}}$$

qua formula ex dato angulo θ eius tangens determinari p
expressio tanquam reciproca praecedentis spectari potest.

CONCLUSIO II

QUA EXPONENS n EVANESCENS ASSUMITUR

13. Hoc ergo casu fractio continua erit

$$1 - \cfrac{zz}{3 - \cfrac{4zz}{5 - \cfrac{9zz}{7 - \cfrac{16zz}{9 - \text{etc.}}}}}$$

Pro parte sinistra autem notandum est esse

$$\frac{(1+z)^n - 1}{n} = l(1+z)$$

ideoque

$$(1+z)^n = 1 + nl(1+z);$$

simili modo erit

$$(1-z)^n = 1 + nl(1-z),$$

unde membrum sinistrum evadet

$$nz\frac{[2 + nl(1+z) + nl(1-z)]}{nl(1+z) - nl(1-z)} = \frac{2z}{l\frac{1+z}{1-z}};$$

1) Hanc fractionem continuam iam pridem a celeberrimo J. H. Lamb
de l'Académie de Berlin, année 1761 (1768) p. 268) *Eulerus* ipse su
tatione 594 (indicis Enestroemiani), *Leonhardi Euleri Opera omnia*, vol. I15,

ergo habebimus istam formam:

$$\frac{2z}{l\frac{1+z}{1-z}} = 1 - \cfrac{zz}{3 - \cfrac{4zz}{5 - \cfrac{9zz}{7 - \cfrac{16zz}{9 - \text{etc.}}}}}$$

que ipse logarithmus sequenti modo exprimetur:

$$l\frac{1+z}{1-z} = \cfrac{2z}{1 - \cfrac{zz}{3 - \cfrac{4zz}{5 - \text{etc.}}}}$$

CONCLUSIO III

QUA SUMITUR EXPONENS n INFINITE MAGNUS

14. Hic ergo, ut fractio continua finitum sortiatur valorem, [quod fieri it,] nisi quantitas z infinite parva statuatur, ponatur $nz = v$, ut sit $z = \frac{v}{n}$, e nostra fractio continua erit

$$1 + \cfrac{vv}{3 + \cfrac{vv}{5 + \cfrac{vv}{7 + \cfrac{vv}{9 + \text{etc.}}}}}$$

membro autem sinistro constat esse

$$\left(1 + \frac{v}{n}\right)^n = e^v$$

lique modo

$$\left(1 - \frac{v}{n}\right)^n = e^{-v},$$

membrum sinistrum habebit hanc formam:

$$\frac{v(e^v + e^{-v})}{e^v - e^{-v}} = \frac{v(e^{2v} + 1)}{e^{2v} - 1};$$

quam ob rem babebimus hanc memorabilem fractionem cont

$$\frac{v(e^{2v}+1)}{e^{2v}-1} = 1 + \cfrac{vv}{3 + \cfrac{vv}{5 + \cfrac{vv}{7 + \cfrac{vv}{9 + \text{etc.}}}}}$$

cuius valor transcendens etiam hoc modo per series solitas

$$\frac{1 + \frac{vv}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{v^6}{1\cdot 2\cdots\cdots 6} + \text{etc.}}{1 + \frac{vv}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdots\cdots 5} + \frac{v^6}{1\cdot 2\cdots\cdots 7} + \text{etc.}}$$

DE UNCIIS POTESTATUM BINOMII EARUMQUE INTERPOLATIONE[1]

Conventui exhibuit die 3. Decembris 1781.

Commentatio 768 indicis ENESTROEMIANI
émoires de l'académie des sciences de St.-Pétersbourg 9 (1819/20), 1824, p. 57—76

Evolutionem potestatis $(1+x)^n$ sequenti modo per idoneos characteros
sentemus:

$$(1+x)^n = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)x^3 + \text{etc.},$$

isti characteres uncinulis inclusi

$$\left(\frac{n}{1}\right),\quad \left(\frac{n}{2}\right),\quad \left(\frac{n}{3}\right)\ \text{etc.}$$

roferant. Erit ergo

$$\left(\frac{n}{1}\right) = n,\quad \left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2},\quad \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\ \text{etc.}$$

genere erit

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}\cdots\cdots\frac{n-q+1}{q},$$

[1] Confer hac cum dissertatione Commentationes 19 et 421 indicis ENESTROEMIANI: *LEON-ULERI Opera omnia*, vol. I_{14}, p. 1 et vol. I_{17}, p. 316. C. B.

negativi accipiuntur. Ceterum pro casu $q=0$ per se ma
$\binom{n}{0}=1$, siquidem hinc primus terminus potestatis evolutae

2. Cum ipsa evolutio potestatis $(1+x)^n$ alias potestates
volvat, nisi quarum exponentes sint numeri integri positivi,
interpolationem admittit. Interim tamen si hanc formam $\binom{n}{q}$
tionem numerorum n et q spectemus, ita ut, si q conside
cuiusdam curvae, eius applicata sit $\binom{n}{q}$, nullum est dubium,
quandam legem continuitatis sit habitura, quam ergo hic inv
Principia autem interpolationis ex serie hypergeometrica W

$$1, \quad 2, \quad 6, \quad 24, \quad 120, \quad 720 \text{ etc.},$$

repetere conveniet, quandoquidem evolutio nostrorum charac
finitate cum hac serie est praedita.

3. Quoniam quilibet terminus seriei hypergeometricae
volvitur: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot m$, eius loco brevitatis gratia scrib
dem ista forma tanquam certa functio ipsius m spectari
interpolationem iam pridem[1]) docui atque demonstravi esse

$$\varphi : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \text{ et } \varphi : -\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$$

denotante π peripheriam circuli radio 1 descripti. At si al
luti $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc. sumantur, valores continuo altiores quantita
requirunt; quamobrem, si nostros characteres ad huiusmo
revocaverimus, interpolatio nulla amplius laborat difficultat

1) Confer Commentationem 19 indicis ENESTROEMIANI, § 15 et § 21;
tionem 421, § 16 et § 28: *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I14, p. 13 e
et 332. C. B.

PROBLEMA

4. *Valorem characteris $\binom{n}{q}$ ad terminos progressionis hypergeometricae rev*

SOLUTIO

Cum sit

$$\binom{n}{q} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-q+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot q},$$

at vero ex progressione hypergeometrica sit

$$\varphi : n = n(n-1)(n-2)\cdots 1,$$

ea ita referri potest:

$$\varphi : n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-q+1)\times(n-q)(n-q-1)\cdots 1,$$

unde patet numeratorem nostrae fractionis esse

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : (n-q)};$$

quamobrem, cum denominator sponte sit $\varphi : q$, valor nostri characteris $\binom{n}{q}$

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : q \times \varphi : (n-q)}.$$

COROLLARIUM

5. Quodsi ergo loco n scribamus $a+b$ et a loco q, habebimus i
aequationem:

$$\binom{a+b}{a} = \frac{\varphi : (a+b)}{\varphi : a \times \varphi : b},$$

in qua formula litterae a et b permutationem admittunt; unde conclu
semper fore

$$\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$$

unde deduci possunt sequentia theoremata notatu maxime dign

THEOREMA 1

6. *Quicunque numeri pro a, b et n accipiantur, semper haec habebit:*

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}=\binom{n}{b}\binom{n-b}{a}.$$

DEMONSTRATIO

Loco n scribatur $a+b+c$, et cum sit per superiorem red

$$\binom{a+b+c}{a}=\frac{\varphi:(a+b+c)}{\varphi:a\times\varphi:(b+c)}$$

atque

$$\binom{b+c}{b}=\frac{\varphi:(b+c)}{\varphi:b\times\varphi:c},$$

productum fiet

$$\binom{a+b+c}{a}\binom{b+c}{b}=\frac{\varphi:(a+b+c)}{\varphi:a\times\varphi:b\times\varphi:c},$$

unde patet litteras a, b, c pro lubitu inter se permutari poss $a+b+c$ restituto n erit

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}=\binom{n}{b}\binom{n-b}{a};$$

utraque enim pars aequalis est huic formae:

$$\frac{\varphi:n}{\varphi:a\times\varphi:b\times\varphi:c}.$$

THEOREMA 2

7. *Istud productum ex ternis characteribus*

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}\binom{n-a-b}{c}$$

r eundem valorem retinet, utcunque litterae a, b, c inter se permutentur.

DEMONSTRATIO

Per reductionem enim ad seriem hypergeometricam habebimus

$$\binom{n}{a} = \frac{\varphi : n}{\varphi : a \times \varphi : (n-a)}, \qquad \binom{n-a}{b} = \frac{\varphi : (n-a)}{\varphi : b \times \varphi : (n-a-b)},$$

$$\binom{n-a-b}{c} = \frac{\varphi : (n-a-b)}{\varphi : c \times \varphi : (n-a-b-c)},$$

productum propositum reducetur ad hanc formam:

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : a \times \varphi : b \times \varphi : c \times \varphi : (n-a-b-c)},$$

expressio manifesto eundem retinet valorem, utcunque litterae a, b, c
se permutentur, quod cum pluribus modis fieri possit, etiam plura huius-
producta inter se aequalia exhiberi poterunt.

COROLLARIUM

3. Hoc modo ulterius progredi licet atque demonstrari poterit istud pro-
m

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b}\binom{n-a-b}{c}\binom{n-a-b-c}{d}$$

tuo eundem valorem retinere, utcunque litterae a, b, c, d permutentur.
enim valor semper erit

$$\frac{\varphi : n}{\varphi : a \times \varphi : b \times \varphi : c \times \varphi : d \times \varphi : (n-a-b-c-d)}.$$

THEOREMA 3

9. *Hoc productum:* $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)$ *semper aequale est huic characteri:* $\left(\frac{0}{a-

DEMONSTRATIO

Cum enim sit per reductionem ad numeros hypergeometricos

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\varphi:a}{\varphi:b\times\varphi:(a-b)}$$

et

$$\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\varphi:b}{\varphi:a\times\varphi:(b-a)},$$

manifesto est

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{\varphi:(a-b)\times\varphi:(b-a)}.$$

Tum vero simili modo erit

$$\left(\frac{0}{a-b}\right)=\frac{\varphi:0}{\varphi:(a-b)\times\varphi:(b-a)}=\frac{1}{\varphi:(a-b)\times\varphi:(b-a)}$$

ob $\varphi:0=1$, unde sequitur

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{0}{a-b}\right);$$

hincque patet hoc productum semper nihilo aequari, quoties $a-b$
merus integer.

SCHOLION

10. His praemissis sit $\left(\frac{P}{Q}\right)$ forma generalis omnium huius gener
tionum, quas hic evolvere constitui, ubi P et Q denotent numeros q
que, sive integros sive fractos sive negativos sive positivos, ita ut
formula infinities-infinita multitudo casuum contineatur, atque iam not
quoties denominator Q fuerit numerus integer positivus, evolutionem
semper institui posse; unde has formas: $\left(\frac{P}{i}\right)$ pro cognitis habebimus
que ope reliquos casus ad maiorem simplicitatem reducere conabim
quenti autem theoremate numerus omnium casuum ad semissem redig

THEOREMA 4

11. *Omnes casus huius formae:* $\binom{P}{Q}$ *facillime reducuntur ad casus, quibus*
Q maior quam $\frac{1}{2}P$.

DEMONSTRATIO

Ponatur enim $Q = \frac{1}{2}P - s$, et cum sit in genere

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b},$$

erit

$$\binom{P}{\frac{1}{2}P - s} = \binom{P}{\frac{1}{2}P + s}$$

icque omnes casus, quibus Q superatur ab $\frac{1}{2}P$, prorsus congruunt cum i
uibus superat $\frac{1}{2}P$.

COROLLARIUM

12. Si ergo concipiatur curva, cuius abscissae x respondeat applica
$= \binom{a}{x}$, tum applicata abscissae $x = \frac{1}{2}a$ simul erit diameter curvae, quand
uidem binis abscissis $x = \frac{1}{2}a + t$ et $x = \frac{1}{2}a - t$ aequales respondent app
atae; unde sufficiet alteram tantum medietatem curvae determinasse.

SCHOLION

13. Cum igitur hoc modo omnes casus in formula $\binom{P}{Q}$ contenti ad s
aissem redigantur, in sequentibus ostendam, quomodo intra multo arctior
mites compingi queant. Si scilicet litterae m et n denotent numeros integr
ositivos, haec formula generalis: $\binom{p \pm m}{q \pm n}$ semper reduci potest ad hanc fo
nam: $M \cdot \binom{p}{q}$, ubi valor factoris M absolute assignari potest. Hoc igit
nodo forma nostra generalis $\binom{P}{Q}$ semper redigi poterit ad talem: $\binom{p}{q}$, in q
umeri p et q intra limites 0 et 1 subsistant. Quin etiam redigi possent int
mites 0 et -1. Huic igitur reductioni inservient sequentia problemata, qu
um solutiones his lemmatibus innituntur.

LEMMA 1

14. *Cum sit*

$$\binom{p+m}{m} = \frac{\varphi:(p+m)}{\varphi:m \times \varphi:p},$$

erit

$$\varphi:(p+m) = \varphi:m \times \varphi:p \times \binom{p+m}{m},$$

cuius characteris valor ob m numerum integrum positivum semper ab
poterit. Eodem igitur modo erit

$$\varphi:(q+n) = \varphi:n \times \varphi:q \times \binom{q+n}{n}.$$

LEMMA 2

15. *Cum sit*

$$\binom{p}{m} = \frac{\varphi:p}{\varphi:m \times \varphi:(p-m)},$$

concluditur fore

$$\varphi:(p-m) = \frac{\varphi:p}{\varphi:m} : \binom{p}{m}.$$

Eodem modo erit

$$\varphi:(q-n) = \frac{\varphi:q}{\varphi:n} : \binom{q}{n}.$$

PROBLEMA 1

16. *Hanc formulam:* $\binom{p \pm m}{q}$, *ubi m denotat numerum integr*
reducere ad hanc simpliciorem: $\binom{p}{q}$.

SOLUTIO

Per reductionem nostram generalem ad numeros hypergeome

$$\binom{p+m}{q} = \frac{\varphi:(p+m)}{\varphi:q \times \varphi:(p-q+m)}.$$

si iam hic ex lemmate primo loco $\varphi:(p+m)$ et $\varphi:(p-q+m)$ valores ituamus, prodibit

$$\binom{p+m}{q} = \frac{\varphi:p}{\varphi:q \times \varphi:(p-q)} \times \frac{\binom{p+m}{m}}{\binom{p-q+m}{m}}.$$

igitur sit

$$\frac{\varphi:p}{\varphi:q \times \varphi:(p-q)} = \binom{p}{q},$$

bimus

$$\binom{p+m}{q} = \frac{\binom{p+m}{m}}{\binom{p-q+m}{m}} \times \binom{p}{q}.$$

PROBLEMA 2

17. *Hanc formulam:* $\binom{p-m}{q}$, *ubi* m *sit numerus integer positivus, reducere ad m simpliciorem* $\binom{p}{q}$.

SOLUTIO

Reductio nostra statim praebet hanc aequationem:

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\varphi:(p-m)}{\varphi:q \times \varphi:(p-q-m)}.$$

am loco $\varphi:(p-m)$ et $\varphi:(p-q-m)$ valores ex lemmate secundo sub- ntur, ac reperietur sequens expressio:

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\varphi:p}{\varphi:q \times \varphi:(p-q)} \times \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}},$$

cum sit

$$\frac{\varphi:p}{\varphi:q \times \varphi:(p-q)} = \binom{p}{q},$$

habebimus formam:

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q}.$$

SOLUTIO

Reductio nostra hic praebet

$$\binom{p}{q+n} = \frac{\varphi : p}{\varphi : (q+n) \times \varphi : (p-q-n)}.$$

Iam ex lemmate primo loco $\varphi : (q+n)$, ex secundo vero loco

valores substituantur prodibitque

$$\binom{p}{q+n} = \frac{\varphi : p}{\varphi : q \times \varphi : (p-q)} \times \frac{\binom{p-q}{n}}{\binom{q+n}{n}} = \frac{\binom{p-q}{n}}{\binom{q+n}{n}} \times \Big($$

PROBLEMA 4

19. *Hanc formulam:* $\binom{p}{q-n}$, *ubi* n *denotet numerum integr*

formam simpliciorem $\binom{p}{q}$ *reducere.*

SOLUTIO

Per reductionem ad numeros hypergeometricos erit

$$\binom{p}{q-n} = \frac{\varphi : p}{\varphi : (q-n) \times \varphi : (p-q+n)}.$$

Quodsi iam loco $\varphi : (q-n)$ ex lemmate secundo, at loco φ

lemmate primo valores substituantur, resultabit expressio

$$\binom{p}{q-n} = \frac{\varphi : p}{\varphi : q \times \varphi : (p-q)} \times \frac{\binom{q}{n}}{\binom{p-q+n}{n}} = \frac{\binom{q}{n}}{\binom{p-q+n}{n}}$$

PROBLEMA 5

20. *Si fuerit*

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{p+m}{q+n}\right),$$

ius valorem ad hanc formam reducere: $M\left(\frac{p}{q}\right)$, ubi M absolute assignare lice
nde quod m et n sint numeri integri positivi.

SOLUTIO

Ex problemate 1 invenimus

$$\left(\frac{p+m}{q}\right) = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+m}{m}\right)} \times \left(\frac{p}{q}\right).$$

uodsi iam hic loco q ubique scribamus $q+n$, erit

$$\left(\frac{p+m}{q+n}\right) = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q-n+m}{m}\right)} \times \left(\frac{p}{q+n}\right).$$

lic loco $\left(\frac{p}{q+n}\right)$ valorem ex problemate 3 substituamus, quo facto fiet

$$\left(\frac{p+m}{q+n}\right) = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right) \times \left(\frac{p-q}{n}\right)}{\left(\frac{p-q-n+m}{m}\right) \times \left(\frac{q+n}{n}\right)} \times \left(\frac{p}{q}\right),$$

bi igitur erit

$$M = \frac{\left(\frac{p+m}{m}\right) \times \left(\frac{p-q}{n}\right)}{\left(\frac{p-q-n+m}{m}\right) \times \left(\frac{q+n}{n}\right)},$$

nius valorem ob m et n numeros integros positivos semper absolute as
nare licebit.

PROBLEMA 6

21. *Si fuerit*

$$\left(\frac{P}{Q}\right)=\left(\frac{p+m}{q-n}\right),$$

eius valorem reducere ad formam $M\left(\frac{p}{q}\right)$.

SOLUTIO

Ex problemate primo cum sit

$$\left(\frac{p+m}{q}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+m}{m}\right)}\times\left(\frac{p}{q}\right),$$

hic ubique loco q scribatur $q-n$, ut prodeat

$$\left(\frac{p+m}{q-n}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)}{\left(\frac{p-q+n+m}{m}\right)}\times\left(\frac{p}{q-n}\right),$$

atque hic loco $\left(\frac{p}{q-n}\right)$ valor ex problemate 4 substituatur, quo fa
nostra hanc impetrabimus expressionem:

$$\left(\frac{p+m}{q-n}\right)=\frac{\left(\frac{p+m}{m}\right)\times\left(\frac{q}{n}\right)}{\left(\frac{p-q+n+m}{m}\right)\times\left(\frac{p-q+n}{n}\right)}\times\left(\frac{p}{q}\right).$$

PROBLEMA 7

22. *Si fuerit*

$$\left(\frac{P}{Q}\right)=\left(\frac{p-m}{q+n}\right),$$

eius valorem reducere ad formam $M\left(\frac{p}{q}\right)$.

SOLUTIO

In problemate 2 invenimus

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q},$$

ubi si loco q scribamus $q+n$ orietur forma proposita

$$\binom{p-m}{q+n} = \frac{\binom{p-q-n}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q+n}.$$

Nunc si ex problemate 3 loco $\binom{p}{q+n}$ valor substituatur, orietur expressio

$$\binom{p-m}{q+n} = \frac{\binom{p-q-n}{m} \times \binom{p-q}{n}}{\binom{p}{m} \times \binom{q+n}{n}} \times \binom{p}{q}.$$

PROBLEMA 8

23. *Si fuerit*

$$\binom{P}{Q} = \binom{p-m}{q-n},$$

eius valorem ad formam simplicem $M\binom{p}{q}$ *reducere.*

SOLUTIO

Sumatur iterum ex problemate secundo expressio

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q}$$

in eaque loco q scribatur $q - n$, ut obtineatur forma proposit

$$\binom{p-m}{q-n} = \frac{\binom{p-q+n}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q-n},$$

unde, substituendo loco characteris $\binom{p}{q-n}$ eius valorem pr
tum, prodibit

$$\binom{p-m}{q-n} = \frac{\binom{p-q+n}{m} \times \binom{q}{n}}{\binom{p}{m} \times \binom{p-q+n}{n}} \times \binom{p}{q}.$$

COROLLARIUM

24. Quoties igitur denominator Q fuerit numerus inte
sive negativus, tum loco q semper statui poterit 0, et q
talis formulae $\binom{P}{Q}$ per nostras reductiones semper absolute
quia in omnibus characteribus denominatores sunt vel m ve
integri. Tantum igitur superest, ut eos casus investigem
quaepiam fractio sive positiva sive negativa, quae [formula (
ad $\binom{p}{q}$, ubi q erit fractio simplicissima eiusdem generis
minor; quamobrem totum negotium eo redit, ut valor h
indagetur, quando q est fractio. Pro his igitur casibus val
per formulam quandam integralem exprimemus.

PROBLEMA

25. *Valorem formulae* $\binom{p}{q}$ *per formulam integralem expri*

SOLUTIO

Hunc in finem consideremus hanc formulam:

$$\int x^{q-1} \partial x (1-x)^n,$$

s valor ab $x=0$ ad $x=1$ extensus designetur per $\triangle$; qui cum sit certa tio ipsius q, puta $f:q$, loco q hic scribamus $q+1$ et $\triangle' = f:(q+1)$;

$$\triangle - \triangle' = \int x^{q-1}\partial x(1-x)^{n+1};$$

ue modo ex quovis casu numeri n reperietur valor ipsius $\triangle$ pro casu 1. Incipiamus a casu $n=0$ et valores ipsius $\triangle$ pro sequentibus numeris a se habebunt:

n	$\triangle$
0	$\frac{1}{q}$
1	$\frac{1}{q(q+1)}$
2	$\frac{1 \cdot 2}{q(q+1)(q+2)}$
3	$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{q(q+1)(q+2)(q+3)}$

Hinc iam manifestum est fore in genere

$$\triangle = \frac{1}{q} \times \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n}{(q+1)(q+2)(q+3)\cdots(q+n)}$$

Cum nunc sit

$$\binom{q+n}{n} = \frac{(q+n)(q+n-1)\cdots(q+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n},$$

ns est fore

$$\triangle = \frac{1}{q} : \binom{q+n}{n},$$

vicissim erit

$$\binom{q+n}{n} = \frac{1}{q\triangle}.$$

nc $q+n=p$ sive $n=p-q$, ut fiat

$$\binom{p}{n} = \binom{p}{p-n} = \binom{p}{q},$$

et cum iam sit

$$\triangle = \int x^{q-1}\partial x(1-x)^{p-q},$$

concludimus fore

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q\int x^{q-1}\partial x(1-x)^{p-q}},$$

ita ut valor huius formulae integralis ab $x=0$ ad $x=1$ extensu
ad valorem characteris $\left(\frac{p}{q}\right)$.

COROLLARIUM

26. Quaecunque ergo fractiones loco p et q substituantur, sem
algebraica exhiberi potest, a cuius quadratura, eaque definita scilic
$x=1$, valor formulae $\left(\frac{p}{q}\right)$ pendeat.

SCHOLION 1

27. Analysis, qua hic usi sumus, videtur quidem tantum loc
casibus, quibus n est numerus integer positivus, neque ergo ad cas
$p-q$ est fractio, applicari posse. Verum ipsum principium c
applicationem ad numeros fractos satis confirmare videtur; inter
iuvabit consensus cum veritate in casu aliunde cognito ostendisse.
retur ergo haec formula: $\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$, ubi $p=1$ et $q=\frac{1}{2}$, eritque per r
generalem

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\varphi:1}{\varphi:\frac{1}{2}\times\varphi:\frac{1}{2}},$$

quae expressio, ob $\varphi:1=1$ et $\varphi:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, evadit $\frac{4}{\pi}$. Nunc igitur
num ista expressio conveniat cum

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

At vero iste denominator posito $x=yy$ abit in

$$\int\partial y\sqrt{1-yy} = \int\frac{\partial y}{\sqrt{1-yy}} - \int\frac{yy\partial y}{\sqrt{1-yy}}.$$

Constat autem, his integralibus ab $y=0$ ad $y=1$ extensis, esse

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{1-yy}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int \frac{yy\partial y}{\sqrt{1-yy}} = \frac{\pi}{4},$$

ta ut differentia sit $\frac{\pi}{4}$, ideoque valor hic inventus $\frac{4}{\pi}$ egregie convenit cu
raecedente.

SCHOLION 2

28. Quod autem ad formulam integralem $\int x^{q-1}\partial x(1-x)^{p-q}$ attinet,
analysi patet eius valorem, ab $x=0$ ad $x=1$ extensum, finitum fieri n
posse, nisi sit $q>0$ simulque $p-q>-1$. Quoniam vero in nostra potesta
est istos numeros p et q, ad quos formulam generalem $\left(\frac{P}{Q}\right)$ reduximus, int
limites 0 et 1 redigere, formula integralis inventa semper ad omnes pla
casus transferri poterit. Ceterum iam manifestum est casibus, quibus Q
numerus integer sive positivus sive negativus, evolutionem actu institui pos
hocque etiam succedit casibus, quibus $P-Q$ est numerus integer, unde us
nostrae formulae integralis erit amplissimus casibus, quibus neque Q neq
$P-Q$ sunt integri. Casus maxime memorabilis hic occurrit, quando P
numerus integer sive positivus sive negativus; tum enim, quaecunque fract
pro Q accipiatur, valor huius expressionis $\left(\frac{P}{Q}\right)$ per peripheriam circuli as
gnari poterit.

PROBLEMA

29. *Valorem formulae* $\left(\frac{P}{Q}\right)$, *quoties* P *fuerit numerus integer sive positi*
sive negativus, ad quadraturam circuli reducere.

SOLUTIO

Quando P est numerus integer sive positivus sive negativus, ista for
semper reduci poterit ad hanc: $\left(\frac{0}{q}\right)$, ita ut $p=0$; sicque per formulam in
gralem erit

$$\left(\frac{0}{q}\right) = \frac{1}{q\int x^{q-1}\partial x(1-x)^{-q}};$$

quamobrem hanc formulam integralem accuratius evolvamu
hanc formam:

$$\int \frac{\partial x}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{q}$$

posito

$$\frac{x}{1-x}=z \quad \text{sive} \quad x=\frac{z}{1+z}$$

a $z=0$ usque ad $z=\infty$ extendi debet. Ob

$$\frac{\partial x}{x}=\frac{\partial z}{z(1+z)}$$

vero formula transmutatur in hanc:

$$\int \frac{z^{q-1}\partial z}{1+z}.$$

At vero olim[1]) ostendi huius formulae integralis[2])

$$\int \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^{n}}$$

valorem a $z=0$ ad $z=\infty$ extensum esse

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

Nostro igitur casu erit $m=q$ et $n=1$, unde nostrum in
quo substituto habebimus

$$\left(\frac{0}{q}\right)=\frac{1}{\frac{q\pi}{\sin. q\pi}}=\frac{\sin. q\pi}{q\pi}.$$

---

1) Vide e. g. Commentationem 254 indicis ENESTROEMIANI, § 46, *I*
omnia, vol. I_{17}, p. 260. C. B.

2) Editio princeps: $\int \frac{z^{m-1}\partial z}{(1+z)^{n}}$; correxit C. B.

ula illa ob $\sin. q\pi = 0$ semper in nihilum abit solo casu excepto $q = 0$. unto autem q quasi infinite parvo ob $\sin. q\pi = q\pi$ erit utique

$$\left(\frac{0}{q}\right) = 1,$$

uemadmodum rei natura postulat.

COROLLARIUM

31. Cum per reductionem nostram generalem sit

$$\left(\frac{0}{q}\right) = \frac{\varphi:0}{\varphi:q \times \varphi:-q},$$

b $\varphi:0 = 1$ erit

$$\varphi:q \times \varphi:-q = \frac{q\pi}{\sin. q\pi},$$

a ut, quicunque valores ipsi q tribuantur, tam valores $\varphi:q$ quam $\varphi:-q$ d quantitates transcendentes superiorum generum referantur; interim tamen orum productum per quadraturam circuli exprimetur.

SCHOLION

32. Cum sit

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q\int x^{q-1}\partial x(1-x)^{p-q}},$$

siquidem hoc integrale ab $x = 0$ ad $x = 1$ extendatur, si istos valores in theo-rematibus supra allatis circa relationem formularum $\left(\frac{p}{q}\right)$ substituamus, sequen-tia nanciscemur theoremata pro relatione formularum integralium, quae maximo videntur memorabilia.

THEOREMA

33. *Si sequentia integralia ab $x=0$ ad $x=1$ extendantur, sem*
aequalitas subsistet:

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x)^{n-a}\times\int x^{b-1}\partial x(1-x)^{n-a-b}$$
$$=\int x^{b-1}\partial x(1-x)^{n-b}\times\int x^{a-1}\partial x(1-x)^{n-b-a}.$$

COROLLARIUM

34. Si in talibus formulis exponens ipsius x evanescat, ut habe

$$\int\partial x(1-x)^{p},$$

eius valor absolute assignari potest eritque $\frac{1}{p+1}$. At si expone
$1-x$ evanescat, ut habeamus

$$\int x^{p}\partial x,$$

eius valor manifesto erit $\frac{1}{p+1}$; sin autem formula integralis fuerit

$$\int x^{q-1}\partial x(1-x)^{-q},$$

eius valor, ut vidimus, erit $\frac{\pi}{\sin. q\pi}$, unde plures relationes notatu di
untur. Ceterum hic notasse iuvabit, exponentes ipsius x et $1-x$
permutari posse, ita ut semper sit

$$\int x^{p}\partial x(1-x)^{q}=\int x^{q}\partial x(1-x)^{p}.$$

THEOREMA

35. *Si omnia integralia ab $x=0$ ad $x=1$ extendantur, productu*
tribus formulis integralibus:

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x)^{n-a}\times\int x^{b-1}\partial x(1-x)^{n-a-b}\times\int x^{c-1}\partial x(1-x)^{n-a-}$$

semper eundem valorem retinebit, quomodocunque litterae a, b, c inter se pe

THEOREMA

36. *Si omnia integralia ab $x=0$ ad $x=1$ extendantur, productum ex quatuor formulis integralibus semper eundem valorem retinebit, quomodocunque litter a, b, c, d inter se permutantur, scilicet*

$$\int x^{a-1}\partial x(1-x)^{n-a} \times \int x^{b-1}\partial x(1-x)^{n-a-b}$$

$$\times \int x^{c-1}\partial x(1-x)^{n-a-b-c} \times \int x^{d-1}\partial x(1-x)^{n-a-b-c-d}.$$

COROLLARIUM

36a.[1]) Hic evidens est numerum talium formularum integralium contin ulterius augeri posse, unde numerus variationum, quae in singulis product locum habere possunt, in infinitum excrescet; ubi quidem observo, casu simplicissimum theorematis primi prorsus convenire cum iis, quae olim[2]) relatione inter diversas formulas integrales proposueram.

SCHOLION

37. Omnia illa integralia in hac forma generali continentur:

$$\int x^p\partial x(1-x)^q,$$

nam constat plurimis modis in alias formas transmutari posse, dum scilic binos exponentes p et q quovis numero integro sive augere sive minuere lice atque inter has diversas formas sine dubio simplicissima est ea, in qua is exponentes intra limites 0 et -1 deprimuntur, quam transformationem pe sequentes reductiones commodissime institui posse facile patet:

1) In editione principe numerus 36 per errorem bis occurrit. C. B.

2) Vide e. g. Commentationem 254 indicis Enestroemiani, § 40; *Leonhardi Euleri Ope omnia,* vol. I_{17}, p. 257. C. B.

$$\int x^p \partial x (1-x)^q = \frac{\quad}{p+1} \int x \ldots$$

$$\int x^p \partial x (1-x)^q = \frac{q}{p+q+1} \int x^p \quad \partial x (1-x)^{q-1},$$

$$\int x^p \partial x (1-x)^q = \frac{p+q+2}{q+1} \int x^p \quad \partial x (1-x)^{q+1}.$$

Saepenumero etiam haec reductio, qua binae praecedentium sim
insignem usum praestat:

$$p \int x^{p-1} \partial x (1-x)^q = q \int x^p \partial x (1-x)^{q-1}.$$

PROBLEMA

38. *Describere lineam curvam, cuius abscissae x respondeat ap*
ubi m denotet numerum integrum positivum.

SOLUTIO

Hic primo investigentur applicatae, quando abscissae x
tribuuntur, easque immediate ex forma $y = \left(\frac{m}{x}\right)$ facile definire

$$\left(\frac{m}{0}\right) = 1; \quad \left(\frac{m}{1}\right) = m; \quad \left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \quad \text{etc.,}$$

donec perveniatur ad $x = m$, ubi iterum est $\left(\frac{m}{m}\right) = 1$. Praeter
omnes applicatae, quae respondent valoribus negativis ipsius
maioribus quam m, evanescunt. At vero iam observavimus
semper praeditam esse diametro, quem praebet applicata abs
respondens, unde sufficiet casus tantum evolvere, quibus $x >$

At si abscissae x valores fractos tribuamus, necesse est
lam $\left(\frac{m}{x}\right)$ ad hanc reducere: $\left(\frac{0}{x}\right)$, quippe cuius valorem ostendi

uod facillime praestatur ope reductionis supra allatae, qua ostendimus

$$\binom{p+m}{q} = \frac{\binom{p+m}{m}}{\binom{p-q+m}{m}} \times \binom{p}{q}.$$

; igitur fiat $p = 0$ et $q = x$ atque colligitur

$$\binom{m}{x} = \frac{\binom{0}{x}}{\binom{m-x}{m}} = \frac{\sin. \pi x}{\pi x} : \binom{m-x}{m}.$$

ormulam evolvendam unicum intervallum abscissae $= 1$ percurrisse suf-, quem in finem statuamus $x = n + q$, ita ut q sit fractio unitate minor, ente n numero integro quovis, eritque $\sin. \pi x = \pm \sin. \pi q$, ubi signum lebit, si n sit numerus par, $-$ vero si impar. Hoc observato habebimus

$$y = + \frac{\sin. q\pi}{\pi(q+n)} : \binom{m-n-q}{m},$$

ia formula iam omnes valores intermedii facile assignari poterunt sicque curva erit descripta.

COROLLARIUM

39. Hic evidens est istius curvae maximam applicatam semper respon-abscissae $x = \frac{1}{2} m$, quae simul erit curvae diameter, cuius determinatio asibus, quibus m est numerus par, nulla laborat difficultate; at si m sit ·us impar, ista maxima applicata a quadratura circuli pendebit, quam in te problemate investigemus.

PROBLEMA

.0. *Investigare maximam applicatam curvae modo ante descriptae, qua abscis- respondeat applicata* $y = \binom{m}{x}$.

hic duos casus evolvi oportebit, prout m fuerit vel numerus
Sit igitur primo $m = 2i$, erit

$$M = \binom{2i}{i},$$

cuius valorem iam dudum[1]) constat reduci ad hanc expre

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cdots \cdot (4i - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot i}$$

Hinc enim patet, pro casu $i = 1$ fore $M = 2$. Si i
$i = 3$, erit $M = 20$ et ita porro.

At si m fuerit numerus impar, ponatur $m = 2i + 1$ er

$$M = \binom{2i+1}{i+\frac{1}{2}},$$

qui valor, si ad numeros hypergeometricos reducatur, fiet

$$M = \frac{\varphi : (2i+1)}{(\varphi : (i + \frac{1}{2}))^2},$$

ubi est

$$\varphi : (2i+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2i+1).$$

At cum sit

$$\varphi : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

hincque porro

$$\varphi : \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\varphi : \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \sqrt{\pi}$$

ideoque in genere

$$\varphi : \left(i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2i+1)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2} \sqrt{\pi},$$

---

1) Vide demonstrationem in Commentatione 575 indicis ENESTR
Opera omnia, vol. I16, p. 553. C. B.

$$\frac{\varphi:(2i+1)}{\varphi:(i+\frac{1}{2})} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2i \times 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{\varphi:(2i+1)}{\varphi:(i+\frac{1}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times 4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdots 4i,$$

xpressio denuo per $\varphi:\left(i+\frac{1}{2}\right)$ divisa subministrat istam:

$$\frac{\varphi:(2i+1)}{(\varphi:(i+\frac{1}{2}))^2} = \frac{4}{\pi} \times \frac{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32\cdots 8i}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdots(2i+1)}.$$

casu $m=1$ erit $i=0$ et

$$M = \frac{4}{\pi},$$

su $m=3$ erit $i=1$ et

$$M = \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{\pi} = \frac{32}{3\pi},$$

u $m=5$ erit $i=2$ et

$$M = \frac{8\cdot 16}{3\cdot 5}\cdot\frac{4}{\pi} = \frac{512}{15\pi}$$

porro.

PROBLEMA

. *Describere curvam, cuius abscissis x respondeant applicatae* $\left(\frac{-m}{x}\right)$, *deno- numerum quemcunque integrum positivum.*

SOLUTIO

x ipsa hac formula $y=\left(\frac{-m}{x}\right)$ sine difficultate eliciuntur applicatae pro s abscissis per numeros integros expressis; erit enim

$$\left(\frac{-m}{0}\right)=1,\quad \left(\frac{-m}{1}\right)=-m,\quad \left(\frac{-m}{2}\right)=\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}$$

porro, quae ergo applicatae signis alternantibus in infinitum progredi- Pro applicatis praecedentibus notetur esse

$$\left(\frac{-m}{-m}\right)=1,\quad \left(\frac{-m}{-m-1}\right)=-m \text{ etc.}$$

ad formulam $\binom{\;}{x}$. Supra autem invenimus esse

$$\binom{p-m}{q} = \frac{\binom{p-q}{m}}{\binom{p}{m}} \times \binom{p}{q}.$$

Quodsi iam hic faciamus $p = 0$ et $q = x$, erit

$$\binom{-m}{x} = \frac{\binom{-x}{m}}{\binom{0}{m}} \times \binom{0}{x} = \frac{\binom{-x}{m}}{\binom{0}{m}}. \text{ si}$$

Quia igitur formula $\binom{0}{m}$ semper evanescit, numerato
numeros integros pro x, nunquam evanescere potest, c
tam y semper esse infinitam, qui est casus prorsus s
habentis applicatas finitas, inter quas intermediae oi
guae; cuiusmodi casus mihi quidem adhuc nondum o
tione Geometrarum haud indignum esse arbitror.

SERIES MAXIME IDONEAE PRO CIRCULI QUADRATURA PROXIME INVENIENDA[1]

Commentatio 809 indicis Enestroemiani

Opera postuma 1, 1862, p. 288—298

1. Antequam Analyseos infinitorum principia essent perspecta, nulla alia ia rationem peripheriae ad diametrum explorandi patebat praeter conside-ationem polygonorum circulo cum inscriptorum tum circumscriptorum. Ex no fonte primum Archimedes notissimam proportionem 22 ad 7, tum vero letius veritati propiorem 355 ad 113 elicuit; donec tandem Ludolfus a Ceulen anc proportionem ad 35 figuras in partibus decimalibus produxit, quem stu-endum et molestissimum laborem certe vix ulterius prosequi licuisset. Deinde ero, cum, Analysis infinitorum ope, series idoneae rationem diametri ad eripheriam exprimentes essent exhibitae, multo minore labore ratio Ludol-iana multo longius, primo scilicet a Scharpio ad 72, tum vero a Machino l 100 ac denique a Lagnio ad 128 figuras decimales est continuata; ex qua atione si circumferentia circuli, cuius diameter distantiam stellarum fixarum naxime remotarum superaret, computaretur, ne millesima quidem pollicis arte a veritate aberraretur.

2. Assidui autem hi calculatores, quorum industria summam merotur audem et admirationem, omnes usi sunt serie, qua arcus circuli ex tangente efinitur, ita ut posita tangente $= t$, radio existente $= 1$, arcus respondens sit

$$= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \text{etc.},$$

1) In *Operum postumorum* argumento loco verbi „inveniendа" legitur „investiganda". — onfer hac cum dissertatione Commentationes indicis Enestroemiani 74, 125, 275, 561 volumi-um praecedentium, imprimis autem Commentationem 705 huius voluminis. C. B.

quae series utique maxime convergens fieri posset, ... diminuere liceret. Verum cum hinc ratio diametri ad periph... nequeat, nisi arcus ille ad totam peripheriam assignabilem et ... rationem, vix minorem arcum in hunc finem accipere licet, q... tangens est $\frac{1}{\sqrt{3}}$; unde denotante π peripheriam circuli, cuiu... $= 1$, fit

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \text{e}\right.$$

seu

$$\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \frac{1}{11 \cdot 3^5} + \text{e}\right.$$

Etsi enim angulus 18°, cuius tangens est $\sqrt{\left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}\right)}$, serie... reddat convergentem, duplex tamen irrationalitas calculum tant... reddit, ut nullum inde compendium sperari possit, quae moles... bus angulis multo magis increscit.

3. Exercitatissimus etiam calculator LAGNIUS, qui hunc ... gissime est prosecutus, angulum 30° aliis minoribus in hoc ... ferendum censuit; verum antequam ipsius seriei terminos evo... numero 12 radicem quadratam ultra 128 figuras decimales ex... erat coactus; quem laborem certe 12 horarum spatio expedir... quin potius crediderim auctorem ei aliquot adeo dies insudasse, ... summa, qua opus est, attentio cum relaxationem tum revision... operationum repetitionem postulat. Hoc autem labore exantla... 265 terminos ad minimum evolvere debebat; primo igitur nu... 128 figuras expressum continuo 265 vicibus per ternarium d... ad quod negotium, si cuiusque figurae inventioni et scriptioni ... secundum tribuamus, quinque horae vix sufficiebant. Deinde ... gulos respective per numeros impares 3, 5, 7, 9, 11, 13 etc. divi... quae opera ob divisores continuo maiores ad minimum tempu... ideoque 10 horarum postulabat. Denique additio cum termi... tivorum tum negativorum utraque seorsim breviori quam qu... spatio expediri haud poterat, sicque totus labor intra 37 hora... diligentia neutiquam potuerat absolvi. Nullum autem est dubiu... tempus duplo imo triplo maius impenderit.

$$\frac{\pi}{4} = \text{Ang. tang } 1 = \text{Ang. tang } \frac{1}{2} + \text{Ang. tang } \frac{1}{3},$$

per duas series

$$\pi = +2\left(1 - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 4^2} - \frac{1}{7\cdot 4^3} + \frac{1}{9\cdot 4^4} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} - \frac{1}{7\cdot 9^3} + \frac{1}{9\cdot 9^4} - \text{etc.}\right),$$

um adeo prior magis convergit quam praecedens ex tangente anguli 30° a; neque hic ulla extractione radicis opus est, quae sola in calculo praenti laborem 12 horarum postulaverat. Deinde priores utriusque seriei ini saltem multo minore labore evolvuntur, cum vel paucis constent is vel periodum in iis agnoscant, unde calculus admodum fit expeditus. autem hic duas series in unam summam colligi oportet, tamen quia s convergunt, multo paucioribus opus est terminis; ita, si fractionem nalem pro π ad 128 figuras instam desideremus, prioris seriei terminos posterioris vero 132 capi conveniet, qui totus labor praecedente ratione matus vix 24 horas requirere videtur.

5. Deinde ex eodem principio, cum sit in genere

$$\text{Ang. tang } \frac{1}{a} = \text{Ang. tang } \frac{1}{b} + \text{Ang. tang } \frac{b-a}{ab+1},$$

$$\text{Ang. tang } \frac{1}{2} = \text{Ang. tang } \frac{1}{3} + \text{Ang. tang } \frac{1}{7}$$

ne

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{Ang. tang } \frac{1}{3} + \text{Ang. tang } \frac{1}{7},$$

1) Vide Commentationem supra laudatam 74 indicis ENESTROEMIANI: *De variis modis circuli aturam numeris proxime exprimendi*, § 11. *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I$_{14}$, p. 252. C. B.

$$+\frac{4}{7}\left(1-\frac{1}{3\cdot 49}+\frac{1}{5\cdot 49^2}-\frac{1}{7\cdot 49^3}+\frac{1}{9\cdot 49^4}-\frac{1}{11\cdot 49\ldots}\right.$$

Hinc ergo si valor ipsius π ad 128 figuras iustas colligi del 132 terminos, posterioris vero tantum 75 terminos evolvisse autem 207 terminorum evolutio certe multo minorem opera calculus a LAGNIO subductus, extractione radicis, quae solu insumebat, exclusa. Ex quo totus hic labor vix 18 horarum nisi divisio per numerum 49 aliquam molestiam crearet.

6. Simili modo loco Ang. tang $\frac{1}{3}$, si non satis parvus v introducere poterimus, servatoque altero habebimus

$$\text{Ang. tang}\,\frac{1}{3}=\text{Ang. tang}\,\frac{1}{7}+\text{Ang. tang}\,\frac{2}{11}$$

ideoque

$$\frac{\pi}{4}=2\,\text{Ang. tang}\,\frac{2}{11}+3\,\text{Ang. tang}\,\frac{1}{7}$$

et

$$\pi=+\frac{16}{11}\left(1-\frac{4}{3\cdot 121}+\frac{4^2}{5\cdot 121^2}-\frac{4^3}{7\cdot 121^3}+\frac{4^4}{9\cdot 121^4}-\ldots\right.$$

$$+\frac{12}{7}\left(1-\frac{1}{3\cdot 49}+\frac{1}{5\cdot 49^2}-\frac{1}{7\cdot 49^3}+\frac{1}{9\cdot 49^4}-\ldots\right.$$

Verum etsi hic multo pauciores terminos assumsisse sufficiat, di maiores numeros 49 et 121 omne fere lucrum adimere videtu haec transformatio:

$$\text{Ang. tang}\,\frac{2}{11}=\text{Ang. tang}\,\frac{1}{7}+\text{Ang. tang}\,\frac{3}{79},$$

quae praebet

$$\frac{\pi}{4}=5\,\text{Ang. tang}\,\frac{1}{7}+2\,\text{Ang. tang}\,\frac{3}{79},$$

pro altero angulo vehemen-
ter convergat, tamen indoles fractionis $\frac{3}{79}$ laborem non mediocriter adauget, ita ut praestare videatur seriebus longe minus convergentibus uti.

7. Quando autem calculo numerico est consulendum, non solum ad convergentiam seriorum, quarum termini in summam colligi debent, respici convenit, sed potissimum ad facilitatem, qua singuli termini per operationes arithmeticas evolvantur; ita, si seriei progressio geometrica sit admixta, calculus facillime expeditur, si huius termini in ratione vel decupla vel centupla vel millecupla decrescant. Quamobrem seriei, qua angulus, cuius tangens est $= \frac{1}{7}$, ac multo magis eius, cuius tangens est $= \frac{3}{79}$, termini non sine ingenti labore evolvuntur, qui forte tantus est, ut quilibet maluerit multo plures terminos seriorum pro angulis, quorum tangentes sunt $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ expedire, neququam enim maior convergentia laborem, quem singulorum terminorum postulat evolutio, compensare videtur. Sin autem eiusmodi angulis uti liceret, quorum tangentes essent $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{100}$ etc., nullum est dubium, quin praeter maiorem convergentiam etiam calculus singulorum terminorum mirum in modum sublevaretur.

8. Hunc autem usum egregie praestat alia seriei forma, qua arcum circularem ex data eius tangente exprimere licet. Deduxi autem hanc seriem ex consideratione formulae differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

ponendo eius integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = z\sqrt{(1-xx)}.$$

Hinc enim fiet differentiando

$$dx = dz(1-xx) - xzdx$$

seu

$$\frac{dz}{dx}(1-xx) - xz - 1 = 0.$$

Statuatur nunc

$$z = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + Ex^9 + \text{etc.}$$

$$-\frac{xxdz}{dx} = \quad -Axx - 3Bx^4 - 5Cx^6 - 7Dx$$

$$-\ xz\ = \quad -Axx - \ Bx^4 - \ Cx^6 - \ Dx^8$$

$$-\ 1\ = -1.$$

Singulis ergo terminis ad nihilum redigendis invenitur

$$A = 1, \quad B = \frac{2}{3}A, \quad C = \frac{4}{5}B, \quad D = \frac{6}{7}C, \quad E = \frac{8}{9}$$

ita ut sit

$$\text{Ang.}\sin x = x\sqrt{(1-xx)}\cdot\left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}x^4 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^6 + \frac{2}{3}\right.$$

9. Sit iam $\frac{m}{n}$ tangens huius anguli, cuius sinus posita

$$x = \frac{m}{\sqrt{(mm+nn)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{(1-xx)} = \frac{n}{\sqrt{(mm+}}$$

ita ut irrationalitas iam ex calculo excedat fiatque

$$\text{Ang.}\,\text{tang}\frac{m}{n} = \frac{mn}{mm+nn}\left(1 + \frac{2mm}{3(mm+nn)} + \frac{2\cdot 4m^4}{3\cdot 5(mm+nn)^2} + \frac{}{3\cdot 5}\right.$$

quae series non solum magis convergit quam vulgaris an

$$\text{Ang.}\,\text{tang}\frac{m}{n} = \frac{m}{n}\left(1 - \frac{m^2}{3n^2} + \frac{m^4}{5n^4} - \frac{m^6}{7n^6} + \frac{m^8}{9n^8} - \right.$$

sed etiam singuli termini fere pari facilitate evolvuntur, multiplicatio per fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ etc. non difficilius divisio per numeros 3, 5, 7, 9 etc. Tum vero, in quo ma cernitur, in eo constat, si numeri $mm+nn$ ad dividendu quam simplices potestates ipsius n, quod commodum i

10. Secundum hanc igitur novam seriem angulos supra exhibitos evol-
mus atque obtinebimus

I. $\quad \text{Ang. tang}\,\frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right)$

I. $\quad \text{Ang. tang}\,\frac{1}{3} = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{10^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{10^3} + \text{etc.}\right)$

I. $\quad \text{Ang. tang}\,\frac{1}{7} = \frac{7}{50}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{50^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{50^3} + \text{etc.}\right)$

'. $\quad \text{Ang. tang}\,\frac{3}{79} = \frac{237}{6250}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{6250} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{9^2}{6250^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{9^3}{6250^3} + \text{etc.}\right),$

ae series ad calculum arithmeticum manifesto multo magis sunt accommo-
tae quam praecedentes, cum prima exigat continuam divisionem per 5, se-
nda per 10, tertia per 50 et quarta per 6250, quae ideo est perquam com-
oda, quod $\frac{9}{6250} = \frac{144}{100000}$; quam ob causam has series praecedentibus longissime
eferendas esse censeo.

11. Denotet more NEWTONIANO in quavis serie littera P terminum quem-
o praecedentem totum, quo facilius pateat, quibusnam operationibus inde
ci oporteat terminum sequentem, atque prima forma

$$\pi = 4\,\text{Ang. tang}\,\frac{1}{2} + 4\,\text{Ang. tang}\,\frac{1}{3}$$

ppeditat has series:

$$\pi = +\frac{8}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}P + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}P + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{5}P + \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{5}P + \text{etc.}$$

$$+\frac{6}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}P + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}P + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{10}P + \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{10}P + \text{etc.};$$

$$\pi = +\frac{24}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}P + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}P + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{10}P + \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{10}P +$$

$$+\frac{56}{100} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50}P + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{50}P + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{50}P + \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{50}P + \text{etc.};$$

at ex tertia

$$\pi = 20\,\text{Ang.tang}\,\frac{1}{7} + 8\,\text{Ang.tang}\,\frac{3}{79}$$

prodit

$$\pi = \frac{28}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50}P + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{50}P + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{50}P + \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{50}$$

$$+\frac{948}{3125} + \frac{2}{3}\cdot\frac{144}{100000}P + \frac{4}{5}\cdot\frac{144}{100000}P + \frac{6}{7}\cdot\frac{144}{100000}P + \frac{8}{9}\cdot\frac{144}{100000}$$

In his postremis seriebus prior ita convergit, ut quilibet terminus quinquagies minor praecedente; posterior vero ita, ut quilibet term fere septingenties praecedente minor; ex quo hoc commodi assequ non sit opus in terminis primum sequentibus cyphras antecedentes quoniam nullum est periculum, ut in locis decimalibus, ubi quivis incipere debet, fallamur, hincque calculus non mediocriter sublevatu

12. His perpensis non dubito pronunciare rationem peripheriae metrum seu valorem ipsius π commodissime et promtissime obtine duabus seriebus:

$$\pi = 2{,}8 + P\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{100} + P\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{100} + P\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{100} +$$

$$+ 0{,}30336 + P\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{144}{100000} + P\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{144}{100000} + P\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{144}{100000} +$$

neque enim certe aliae exhiberi possunt series, quae tantopere co simulque singuli termini tam facile per calculum arithmeticum ev Hinc ergo speciminis loco valorem π tantum ad 20 notas decimales et quo calculus certior reddatur, eum ad 22 notas extendam, in singu terminis finem tantum notabo, ut nota 22da sit ultima, quoniam hin sponte patet. Prioris ergo seriei terminorum evolutio ita se habebi

	[illegible]	div. per 5
	746666666666666666666	
	2986666666666666666666	mult. per $\frac{2}{100}$
III.	59733333333333333333	div. per 7
	8533333333333333333	
	51200000000000000000	mult. per $\frac{2}{100}$
IV.	102400000000000000	div. per 9
	11377777777777777	
	91022222222222222	mult. per $\frac{2}{100}$
V.	182044444444444	div. per 11
	165494949494949	
	1654949494949494	mult. per $\frac{2}{100}$
VI.	33098989898989	div. per 13
	2546076146076	
	30552913752913	mult. per $\frac{2}{100}$
VII.	611058275058	div. per 15
	40737218337	
	570321056721	mult. per $\frac{2}{100}$
VIII.	11406421134	div. per 17
	670965949	
	10735455185	mult. per $\frac{2}{100}$
IX.	214709103	div. per 19
	11300479	
	203408624	mult. per $\frac{2}{100}$
X.	4068172	div. per 21
	193722	
	3874450	mult. per $\frac{2}{100}$
XI.	77489	div. per 23
	3369	
	74120	mult. per $\frac{2}{100}$
XII.	1482	div. per 25
	59	
	1423	mult. per $\frac{2}{100}$
XIII.	28	

in ratione $1 : 50$ decrescentem, unde plures eorum evolvi non

13. Altera autem series sequenti calculo computabitur:

I. . . .	0,30336000000000000000000	div. per 3
	10112000000000000000000	
	20224000000000000000000	mult. per $\frac{14}{100}$
II.	291225600000000000000	div. per 5
	58245120000000000000	
	232980480000000000000	mult. per $\frac{14}{100}$
III.	33549189120000000	div. per 7
	4792741302857l4	
	28756447817l4285	mult. per $\frac{14}{100}$
IV.	4140928485668	div. per 9
	460103165074	
	3680825320594	mult. per $\frac{14}{100}$
V.	5300388461	div. per 11
	481853496	
	4818534965	mult. per $\frac{14}{100}$
VI.	6938690	div. per 13
	533745	
	6404945	mult. per $\frac{14}{100}$
VII.	9223	div. per 15
	615	
	8608	mult. per $\frac{14}{100}$
VIII.	12	

Huius ergo seriei pro viginti duabus notis tantum opus est
unde $22n$ notae circiter postulabunt evolutionem $8n$ terminoru
128 notis sufficiet evolvisse 47 terminos.

II.	373333333333333333313
III.	5973333333333333331
IV.	102400000000000000
V.	1820444444444444
VI.	33098989898989
	2,8379410920210101010101
VII.	611058275058
VIII.	1440621134
IX.	214709103
X.	4068172
XI.	77489
XII.	1482
XIII.	28
	2,8379410920832784562570

…mili modo addantur termini alterius seriei

I.	0,3033600000000000000000
II.	2912256000000000000
III.	3351918912000000
IV.	4140928485668
V.	5300388461
VI.	6938690
VII.	9223
VIII.	12
	0,3036515615065147822055
prior	2,8379410920832784562570
π =	3,1415926535897932384625

…o numerus ultima nota excepta iustus deprehenditur, totusque hic cal-…lus laborem unius circiter horae consumsit; ex quo intelligere licet, si quis …ntum laborem, quantum Lagnius impendere velit, eum valorem peripheriae …facile ad 200 notas decimales esse extensurum.

semel observatis hos terminos quousque libuerit facilime
ita prioris seriei termini priores omissis in quoque cyphri
modo procedent, ubi notas periodicas deinceps continuo
inclusi:

I. 2,800 etc.
II. 37333 etc.
III. 597333 etc.
IV. 102400 etc.
V. 1820444 etc.
VI. 330(98)(98) etc.
VII. 611(058275)(058275) etc.
VIII. 11406(421134)(421134) etc.
IX. 21470(910370675076557429498605969194204488322

Seriei autem posterioris termini priores in infinitum cont

I. 0,3033600 etc.
II. 291225600 etc.
III. 335491891200 etc.
IV. 414092848566(857142)(857142) etc.
V. 53003884616557(714285)(714285) et
VI. 6938690349803091(896103)(896103) e
VII. 92231207111239784(343656)(343656)
VIII. 1239587423575062701577(874125) etc

16. Colligamus nunc octo priores terminos in infini
unam summam, ut ea statim qui calculum ulterius cont
queat, et pariter revolutiones periodicas in utraque summ

SUMMA 8 PRIORUM TERMINORUM SERIEI PRIORIS

I.	2,80
II.	3733333333333333 3333333333
III.	597333333333333 3333333333
IV.	10240000000 0000000000
V.	182044444 4444444444
VI.	33098989 8989898989 8
	2,8379410920210101 0101010101 0
VII.	611058 2750582750 5
VIII.	11406 4211344211 3
	2,8379410920832565 70629370629
seu	2,8379410920832565 (706293) (706293) etc.

PRO POSTERIORE SERIE 1)

I.	0,30336
II.	2912256
III.	3354918912
IV.	414092848566857142 etc.
	0,30365156150598401856685714285714285714 2 etc.
V.	530038846165577142857142857
	0,3036515615065140874130227200000000000000
VI.	693869034980391 (89610 3)(89610 3)(89610 3)(89610 3)
VII.	922312071112 39784 (3 43656)(3 43656)(3 43656)(3
VIII.	1239587423 57506 2 70157 (8 74125)(8 74125)(8
	694792586638927 86901 0 03424 (6 07392)(6 07392)(6
	0,30365156150651408741302272 0000 00000 0 00000 0 00000 0 00000 0
	0,3036515615065147822056093 58927 86901 0 03424 (6 07392)(6 07392)(6

1) In editione principe termini octavi nota decima tertia, quae est 5, per errorem omissa . Cum hic error in sequentes calculos irrepsisset, pro summa octo priorum terminorum iste valor ortus erat

0,3036515615065147822056093589278645743484 (547452) etc.,

oni notae 93tia et sequentes falsae sunt. Correxit C. B.

at terminus sequens nonus sub nota demum vigesima quarta, ... cipit, unde facile accuratiores approximationes indagare licet.

17. In evolutione quidem terminorum ulteriorum divisi... numeros impares moram facessere potest, ita ut ad has ope... maius tempus sit impendendum, quam supra ad minores spe... aestimavi. Verumtamen haec difficultas in serie vulgari ex an... multo est maior, propterea quod ob plures terminos evolvend... ribus divisoribus opus est conficiendum, praeterquam quod, ... operatio suscipi queat, tam taediosam radicis extractionem a... Quam ob causam dubium plane nullum superesse potest, quin ... binis novis seriebus utens longe facilius et promtius rationem ... diametrum pro quovis praecisionis gradu definire queat, qua... more consueto institueret; et quantumvis temporis spatium in... insumere cogatur, certum est more solito tempus plus quam dupl...

18. Ceterum observasse adhuc iuvabit seriem hic pro arc... traditam etiam directe ex serie consueta

$$s = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9} \ldots$$

ut s sit arcus cuius tangens $= t$, elici posse; cum enim sit

$$tts = t^3 - \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{5}t^7 - \frac{1}{7} \ldots$$

erit addendo

$$(1 + tt)s = t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{3 \cdot 5}t^5 + \frac{2}{5 \cdot 7}t^7 - \frac{2}{7 \cdot 9} \ldots$$

Porro

$$tt(1 + tt)s = t^3 + \frac{2}{3}t^5 - \frac{2}{3 \cdot 5}t^7 + \frac{2}{5 \cdot 7} \ldots$$

$$tt)^3 s = t(1+tt)^2 + \frac{2}{3}t^3(1+tt) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5 \qquad + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}t^7 - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}t^9 + \text{etc.}^{1)}$$

$$tt)^4 s = t(1+tt)^3 + \frac{2}{3}t^3(1+tt)^2 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}t^5(1+tt) + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}t^7 + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}t^9 - \text{etc.}$$

e continuo progrediendo evidens est hinc obtineri

$$s = \frac{t}{1+tt} + \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3}{(1+tt)^2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{t^5}{(1+tt)^3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{t^7}{(1+tt)^4} + \text{etc.}$$

$$s = \frac{t}{1+tt}\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{tt}{1+tt} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{t^4}{(1+tt)^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{t^6}{(1+tt)^3} + \text{etc.}\right),$$

series ponendo $t = \frac{m}{n}$ cum ante exhibita congruit.

19. Quoniam seriei prioris terminum nonum exhibui, cuius revolutiones dicae 48 figuras complectuntur, seriei quoque posterioris terminum nonum ubiungam[2])

1680005543480555673161

(293294940353763883175647881530234471410941999177) (293 etc.

23 cyphrae sunt praefigendae, antequam ad comma, partes decimales a integrorum separans, perveniatur, ita ut prima huius termini periodus

1) In editione principe coefficiens potestatis t^9 indicatur $\frac{2\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 7\cdot 9}$. Correxit C. B.

2) Huius fractionis notae undecima, decima secunda et decima tertia, quae sunt 480, in ne principe exhibitae sunt ut sequitur: 502. Hic et in formulis sequentibus correxit C. B.

in loco nonagesimo quarto terminetur. Si loco notarum periodic
fractionem ordinariam adiicere, hic terminus nonus ita finito ex

$$\text{IX.} \qquad 16800055434805555673161\,\tfrac{713}{2431}\left[=\tfrac{9}{11}-\tfrac{3}{13}-\tfrac{5}{17}\right]$$

Simili autem modo prioris seriei terminus nonus expressus est[1])

$$21470\,\frac{19918}{21879}.$$

Deinde summas octo terminorum supra exhibitas ita repraesenta

---

1) Editio princeps: $21470\,\frac{21002}{21879}$. Correxit C. B.

2) Editio princeps:

PRIORIS SERIEI

$$\text{Summa I} \ldots \text{VIII} \quad 2{,}8379410920832565\,\tfrac{101}{143}\left[=\tfrac{1}{11}+\tfrac{8}{13}\right]$$

$$\text{terminus IX} \qquad 21470\,\tfrac{21002}{21879}\left[=\tfrac{5}{9}+\tfrac{4}{11}-\tfrac{2}{13}+\right.$$

$$\text{summa I} \ldots \text{IX} \quad 2{,}83794109208327804\,1\,\tfrac{12893}{21879}.$$

POSTERIORIS SERIEI

$$\text{I} \ldots \text{VIII} \quad 0{,}3036515615065147822056093589278645743484\,\tfrac{548}{1001}$$

$$\text{IX} \qquad 16800055435025555673161$$

$$\text{I} \ldots \text{IX} \quad 0{,}3036515615065147822056110389334080769040220613$$

ubi notetur esse

$$\frac{14307}{17017}=\frac{8}{7}+\frac{1}{11}+\frac{8}{13}-\frac{5}{17},$$

unde huius fractionis evolutio est in promtu. Parique modo est prior fractio

$$\frac{12893}{21879}=\frac{5}{9}+\frac{5}{11}-\frac{7}{13}+\frac{2}{17}.$$

Correx

PRIORIS SERIEI

Summa I ... VIII	$2{,}8379410920832565\,70\,\frac{90}{143}$	$\left[=\frac{1}{11}+\frac{7}{13}\right]$
terminus IX	$21470\,\frac{19918}{21879}$	$\left[=\frac{1}{9}+\frac{7}{11}-\frac{4}{13}+\frac{8}{17}\right]$
summa I IX	$2{,}8379410920832780\,41\,\frac{11809}{21879}$	$\left[=\frac{1}{9}+\frac{8}{11}+\frac{3}{13}+\frac{8}{17}\right]$

POSTERIORIS SERIEI

summa I ... VIII	$0{,}3036515615065147822056093589278690100342460739\,\frac{261}{1001}$
terminus IX	$16800055434805555673161\,\frac{713}{2431}$
summa I IX	$0{,}3036515615065147822056110389334124905898133900\,\frac{9428}{17017}$

ubi notetur esse

$$\frac{261}{1001}=\frac{3}{7}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}$$

$$\frac{713}{2431}=\frac{9}{11}-\frac{3}{13}-\frac{5}{17}$$

$$\frac{9428}{17017}=\frac{3}{7}+\frac{8}{11}-\frac{4}{13}-\frac{5}{17}.$$

ENODATIO INSIGNIS CUIUSDAM PARADOXI CIRCA MULTIPLICATIONE ANGULORUM OBSERVATI[1]

Commentatio 810 indicis ENESTROEMIANI

Opera postuma 1, 1862, p. 299—314

1. Singularis est proprietas formularum, quibus cosinus angu tiplorum per cosinum anguli simpli exprimuntur. Si enim angu cosinus ponatur $= x$, angulorum multiplorum cosinus ita se habe

$$\begin{aligned}
\cos. 0\varphi &= 1\\
\cos. 1\varphi &= x\\
\cos. 2\varphi &= 2xx - 1\\
\cos. 3\varphi &= 4x^3 - 3x\\
\cos. 4\varphi &= 8x^4 - 8xx + 1\\
\cos. 5\varphi &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
\cos. 6\varphi &= 32x^6 - 48x^4 + 18xx - 1\\
\cos. 7\varphi &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
\cos. 8\varphi &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32xx + 1
\end{aligned}$$

etc.,

1) Confer hac cum dissertatione praeter huius voluminis partis primae Comm 703, 704, 747 indicis ENESTROEMIANI etiam Commentationem 247 voluminis I₁₁ et ad paginas 542 et 543 adiectas. C. B.

seu

$$\cos. n\varphi = 2^{n-1}x^n\Big(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}$$

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{etc.}\Big),$$

ubi ratio progressionis facile perspicitur.

2. Neque vero hinc concludere licet hanc seriem eadem lege in infini continuatam cosinum anguli $n\varphi$ exprimere, ita ut istius seriei infinitae sum futura sit $= \cos. n\varphi$; sed quoties n est numerus integer, seriem eousque tum continuari oportet, donec ad exponentes negativos ipsius x pervenia quippe qui termini omnes sunt reiiciendi iis solis ab initio seriei term retentis, qui constant potestatibus positivis ipsius x, et numero absoluto, si n sit numerus par, est vel $+1$ vel -1. Nisi haec cautela observetur errorem delabimur, quin etiam casu $n = 0$ expressio generalis veritati ad satur; prodit enim $2^{-1}x^0 = \frac{1}{2}$, cum tamen sit $\cos. 0\varphi = 1$, quod certe ins est paradoxon.

3. Quo clarius etiam in reliquis casibus falsitas formae generalis spiciatur, ponamus $n = 1$, et haec forma evadet:

$$x\Big(1 - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1\cdot 2}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{1\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} - \frac{1\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \frac{1\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}x^{-10} - \text{et}$$

quae cum sit $< x$, cum veritate certe consistere nequit. Ut autem hu seriei valor verus exploretur, ea ad hanc formam reducta:

$$x\Big(1 - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}x^{-4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{4\cdot 4\cdot 6}x^{-6} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{-8} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^{-10} - \text{etc.}\Big)$$

Cum iam sit

$$(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^{-4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^{-6} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{-8} -$$

nostra series hac finita forma continetur:

$$x - \frac{1}{2}x\left(1-(1-x^{-2})^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x\sqrt{\left(1-\frac{1}{xx}\right)} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{(}$$

ita ut casu $n=1$ seriei nostrae generalis summa futura sit $=$
cum tamen sit $\cos. 1\varphi = x$. Quin etiam, cum sit $x<1$, patet ser
tum continuatae summam adeo fore imaginariam.

4. Idem etiam de quolibet alio valore ipsius n ostendi pote
magis mirandum est expressionem nostram generalem, si iusta
adhibeatur, ut omnes termini exponentes negativos ipsius x habit
tur, veritati esse consentaneam et valorem ipsius $\cos. n\varphi$ praebere;
omni extensione sumta et in infinitum continuata longe aliam
imaginariam summam sortiatur; cuiusmodi singulare phaenomeno
in aliis analyseos partibus iam sit observatum. Praeterea vero
haud minus est mirandum, notari convenit limitatione quoque il
ut potestates negativae ipsius x reiiciantur, veritatem non obtiner
numerus positivus integer; si enim n esset numerus negativus,
potestates ipsius x prodeuntes negativas, error foret manifestissim
$\cos.(-n\varphi) = \cos. n\varphi$.

5. Sin autem pro n accipiatur numerus positivus quidem
nullo modo inde veritatem elicere licet. Sit enim $n=\frac{1}{2}$, et expr
generalis hanc induet formam:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{8}x^{-2} - \frac{1\cdot 5}{8\cdot 16}x^{-4} - \frac{1\cdot 7\cdot 9}{8\cdot 16\cdot 24}x^{-6} - \frac{1\cdot 9\cdot 11\cdot 13}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^{-8} -\right.$$

nde etiamsi termini negativas potestates ipsius x complexuri, omnes scilicet praeter primum, expungantur, tamen neutiquam inde obtinetur $\cos.\frac{1}{2}\varphi$, quippe cum sit

$$\cos.\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

Multominus autem reliquis terminis admissis veritati consulitur, dum series prodit formulae $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ minime aequalis.

6. Hinc igitur abunde liquet, quid de forma illa canonica

$$\cos.n\varphi = 2^{n-1}x^n\Big(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{etc.}\Big)$$

apud plurimos auctores mirifice laudata sit iudicandum. Ea scilicet veritati nunquam est consentanea, nisi hae restrictiones adhibeantur: primo, ut n sit numerus integer positivus, ubi quidem etiam cyphra est excludenda; deinde ut termini, in quibus exponens potestatis x fit negativus, penitus extinguantur. Qui huic formulae plus tribuunt, eamque adeo ad casus, quibus n est numerus negativus vel fractus, extendere volunt, maxime decipiuntur et in gravissimos errores illabuntur. Quae cum sint adeo manifesta, mirandum videtur, quod istae tam necessariae cautelae, quantum equidem memini, a nemine sint animadversae.

7. Haec consideratio occasionem mihi praebet duplicem investigationem suscipiendi. Primo scilicet in veram summam nostrae expressionis generalis, siquidem in infinitum continuetur, sum inquisiturus, ut pateat, quantum ea quovis casu a valore $\cos.n\varphi$ discrepet. Deinde similem expressionem generalem investigabo, quae revera valorem $\cos.n\varphi$ exhibeat et nulla restrictione adhibita veros cosinus angulorum multiplorum ipsius φ praebeat, ita ut singulis casibus, quibus n est numerus integer, formulae initio allatae prodeant, simulque veritas, quando n est numerus fractus vel negativus, obtineatur.

8. Quo utrique instituto facilius satisfaciam, considero hanc for

$$s = A(x + \sqrt{(xx - 1)})^n$$

valorem ipsius s per seriem evoluturus, quae secundum potestate procedat. Cum igitur sit

$$\sqrt{(xx - 1)} = x - \frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4x^3} - \text{etc.},$$

ob

$$s = A\left(2x - \frac{1}{2x} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4x^3} - \text{etc.}\right)^n$$

observo terminum primum futurum esse $= 2^n Ax^n$, in sequentibus ponentes potestatis x continuo binario decrescere, ita ut series habitura sit formam

$$s = \alpha x^n + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-4} + \delta x^{n-6} + \varepsilon x^{n-8} + \text{etc.},$$

ubi quidem est $\alpha = 2^n A$.

9. Ad hanc autem seriem commodissime eruendam observo ae assumtam per differentiationem in aliam converti oportere, in potestas indefinita quam omnis irrationalitas absit simulque quanti que plus una dimensione non sit habitura; huiusmodi enim aequati per seriem certa lege procedentem resolvitur. Hunc in finem prim mis sumendis obtineo

$$ls = lA + nl(x + \sqrt{(xx - 1)});$$

tum vero differentiando:

$$\frac{ds}{s} = \left(ndx + \frac{nxdx}{\sqrt{(xx-1)}}\right) : (x + \sqrt{(xx - 1)}) = \frac{ndx}{\sqrt{(xx - 1)}}.$$

Hic sumtis quadratis erit

$$\frac{ds^2}{ss} = \frac{nndx^2}{xx - 1}$$

seu

$$(xx - 1)ds^2 = nnssdx^2,$$

ae aequatio denuo differentiata sumto elemento dx constante et per $2d$
isa dat

$$(xx-1)dds+xdxds=nnsdx^2,$$

o iam formam habet desideratam, ita ut quantitas s nusquam plus un
nensione habeat et quantitas x ab omni irrationalitate sit immunis.

10. Quia hic quantitas x in aliis terminis duas, in uno vero nullam tene
nensionem, facta huiusmodi distinctione, ut sit

$$xxdds+xdxds-nnsdx^2-dds=0,$$

amus

$$s=\alpha x^m+\beta x^{m-2}+\gamma x^{m-4}+\cdots+\mu x^{m-i}+\nu x^{m-i-2}+\text{etc.}$$

facta substitutione potestas x^{m-i-2} talem accipiet coefficientem:

$$\nu((m-i-2)(m-i-3)+m-i-2-nn)-\mu(m-i)(m-i-1),$$

cum evanescere debeat, quantitas ν ex μ ita definitur, ut sit

$$\nu=\frac{(m-i)(m-i-1)}{(m-i-2)^2-nn}\mu.$$

tuatur iam pro initio $i=-2$, ut fiat $\nu=\alpha$ et $\mu=0$, proditque

$$\alpha=\frac{(m+2)(m+1)}{mm-nn}0,$$

o littera ut maneat indefinita, esse oportet $mm=nn$ ideoque vel $m=$
$m=-n$.

11. Nostro autem casu est, ut supra vidimus, $m=n$ atque $\alpha=2^nA$
ro posito

$$s=\alpha x^n+\beta x^{n-2}+\gamma x^{n-4}+\cdots+\mu x^{n-i}+\nu x^{n-i-2}+\text{etc.}$$

$$\nu=\frac{(n-i)(n-i-1)}{(n-i-2)^2-nn}\mu=-\frac{(n-i)(n-i-1)}{(i+2)(2n-i-2)}\mu,$$

$$\gamma = \frac{-(n-2)(n-3)}{8(n-2)}\beta = \frac{+n(n-3)}{4\cdot 8}\alpha,$$

$$\delta = \frac{-(n-4)(n-5)}{12(n-3)}\gamma = \frac{-n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}\alpha,$$

$$\varepsilon = \frac{-(n-6)(n-7)}{16(n-4)}\delta = \frac{+n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}\alpha$$

etc.

12. Posito ergo

$$s = A(x + \sqrt{(xx-1)})^n$$

ob $\alpha = 2^n A$ habebimus hanc seriem, qua quantitas s exprimitu

$$s = 2^n A x^n\Big(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}$$

$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{et}$$

Quare si pro A capiatur $\frac{1}{2}$, orietur ipsa illa forma, quam init assignavimus existente $x = \cos.\varphi$, atque nunc quidem patet illi in infinitum continuatae verum valorem esse

$$\frac{1}{2}(x + \sqrt{(xx-1)})^n;$$

sicque ratio aberrationis a valore $\cos. n\varphi$ est manifesta, atqu evidens est, cur sumto $n = 0$ prodeat summa nostrae seriei vero casibus summa fiat imaginaria, si quidem sit $x < 1$. $x = 1$, quicunque numerus pro n accipiatur, summa semper es propterea

$$1 = 2^n\Big(1 - \frac{n}{4} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{n(n-5)(n-6)(n}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}$$

quod certe est theorema non inelegans.

$$\sqrt{(xx-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi$$

et ex notis sinuum proprietatibus

$$(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)^n = \cos.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi\,.$$

Quare posito $\cos.\varphi = x$ erit

$$\cos.n\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi$$

$$= 2^n x^n\left(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} + \text{etc.}\right),$$

unde patet summam huius seriei in infinitum continuatae esse imaginariam nisi sit $x=1$ seu $\varphi=0$. Realis quidem semper erit, dum sit $x>1$; sed hi casibus non amplius ad sinus et cosinus referri potest. Veluti si $xx=2$, o

$$s = A(1+\sqrt{2})^n$$

erit

$$(\sqrt{2}+1)^n = 2^{\frac{3n}{2}}\left(1 - \frac{n}{8} + \frac{n(n-3)}{8\cdot 16} - \frac{n(n-4)(n-5)}{8\cdot 16\cdot 24} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32} - \text{etc.}\right)$$

At si ponamus

$$x + \sqrt{(xx-1)} = y,$$

fit

$$x = \frac{yy+1}{2y},$$

unde obtinetur sequens summatio non contemnenda:

$$\left(\frac{yy}{yy+1}\right)^n = 1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{yy}{(yy+1)^2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\cdot\frac{y^4}{(yy+1)^4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{y^6}{(yy+1)^6} + \text{etc}$$

quae cum etiam vera sit sumto n negativo, erit

$$\left(\frac{yy+1}{yy}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{yy}{(yy+1)^2} + \frac{n(n+3)}{1\cdot 2}\cdot\frac{y^4}{(yy+1)^4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{y^6}{(yy+1)^6} + \text{etc}$$

ubi pro n omnes numeros assumere licet.

14. Hinc etiam alteri requisito satisfacere poterimus, quo
pressio infinita desideratur quantitatem $\cos. n\varphi$ sine ulla restricti
Sumatur enim exponens n negative, et cum sit

$$\cos. (-n\varphi) = \cos. n\varphi$$

et

$$\sin. (-n\varphi) = -\sin. n\varphi,$$

erit ex superiori forma

$$\cos. n\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi$$

$$= \frac{1}{2^n x^n}\left(1 + \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} x^{-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x^{-6} + \text{e}\right.$$

addendis his formulis pars imaginaria tollitur et summae semi

$$\cos. n\varphi = + 2^{n-1} x^n \left(1 - \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4 \cdot 8} x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x\right.$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1} x^n}\left(1 + \frac{n}{4} x^{-2} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} x^{-4} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} x\right.$$

Hae scilicet binae series coniunctae verum valorem ipsius cos
$\cos. \varphi = x$ exprimunt idque sine ulla restrictione, ita ut pro n o
tam negativos quam positivos, tam integros quam fractos as
Ubi quidem per se est perspicuum, sive ipsi n tribuatur valor
cunque sive idem positivus, easdem binas series ordine mutato

$$\cos. 0\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Reliquos igitur casus simpliciores evolvamus:

I. Sit $n = 1$ oritque

$$\cos. \varphi = x\left(1 - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1\cdot 2}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{1\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} - \frac{1\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{4x}\left(1 + \frac{1}{4}x^{-2} + \frac{1\cdot 4}{4\cdot 8}x^{-4} + \frac{1\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} + \frac{1\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} + \text{etc.}\right),$$

ubi potestates negativae ipsius x sponte se destruunt, uti ex sequente repraesentatione fit perspicuum:

$$\cos. \varphi = x - \frac{1}{4}x^{-1} - \frac{1\cdot 2}{4\cdot 8}x^{-3} - \frac{1\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-5} - \frac{1\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-7} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{4}x^{-1} + \frac{1\cdot 1}{4\cdot 4}x^{-3} + \frac{1\cdot 1\cdot 4}{4\cdot 4\cdot 8}x^{-5} + \frac{1\cdot 1\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 4\cdot 8\cdot 12}x^{-7} + \text{etc.},$$

ita ut sit

$$\cos. \varphi = x.$$

II. Sit $n = 2$ oritque

$$\cos. 2\varphi = 2xx\left(1 - \frac{2}{4}x^{-2} - \frac{2\cdot 1}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{2\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} - \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{8xx}\left(1 + \frac{2}{4}x^{-2} + \frac{2\cdot 5}{4\cdot 8}x^{-4} + \frac{2\cdot 6\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} + \frac{2\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8} + \text{etc.}\right)$$

quae binae series ita ordinatae exhibeantur:

$$\cos. 2\varphi = 2xx - 1 - 2\cdot\frac{2\cdot 1}{4\cdot 8}x^{-2} - 2\cdot\frac{2\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-4} - 2\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-6} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{1}{8}x^{-2} + \frac{1\cdot 2}{8\cdot 4}x^{-4} + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{8\cdot 4\cdot 8}x^{-6} + \text{etc.}$$

$$+\frac{1}{16x^3}\left(1+\frac{3}{4}x^{-2}+\frac{3\cdot 6}{4\cdot 8}x^{-4}+\frac{3\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}+\frac{3\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x\right.$$

qui termini hoc modo in ordinem redigantur:

$$\cos.3\varphi=4x^3-3x-0x^{-1}-4\cdot\frac{3\cdot 1\cdot 2}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-3}-4\cdot\frac{3\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-}$$

$$+\quad\frac{1}{16}\quad x^{-3}+\qquad\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}\quad x^{-}$$

hincque

$$\cos.3\varphi=4x^3-3x.$$

16. His autem exemplis casu evenire videtur, ut potestates mutuo tollant, neque id pro terminis ulterioribus patet. Quamobr dubium relinquatur, firma demonstratione evincendum est singul negativas ipsius x in utraque serie paribus coefficientibus signisq esse affectas, ita ut certum sit omnes se mutuo destruere. Hu utriusque seriei terminum generalem contemplemur ac prioris q ita repraesentatae

$$2^{n-1}x^n\left(1-\frac{n}{4}x^{-2}-\frac{n(3-n)}{4\cdot 8}x^{-4}-\frac{n(4-n)(5-n)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}\right.$$

$$-\frac{n(5-n)(6-n)(7-n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8}-$$

terminus generalis colligitur fore

$$-2^{n-1}x^{n-2\alpha}\cdot\frac{n(\alpha+1-n)(\alpha+2-n)(\alpha+3-n)\cdots(2\alpha-1-}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\ldots\cdot 4\alpha}$$

ita, ut potestatis $x^{n-2\alpha}$ coefficiens sit

$$-2^{n-1}\cdot\frac{n(\alpha+1-n)(\alpha+2-n)(\alpha+3-n)\cdots(2\alpha-1-n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\cdots\cdot 4\alpha}.$$

Quando ergo haec potestas est negativa seu $2\alpha>n$, patet hunc termi evanescere his casibus:

$$2\alpha=n+1,\quad 2\alpha=n+2,\quad 2\alpha=n+3\quad\text{usque ad}\quad 2\alpha=2n-2,$$

si quidem α fuerit numerus integer. Unde in priori serie omnium potest negativarum coefficientes sponte evanescunt, nisi sit $2\alpha>2n-2$ seu $\alpha>n$ quocirca docendum restat, si fuerit $\alpha>n-1$, istas potestates negativas alteram seriem destrui, ita ut solae potestates positivae ipsius x relinqua

17. Alterius autem seriei, quae ita se habet:

$$\frac{1}{2^{n+1}x^n}\Big(1+\frac{n}{4}x^{-2}+\frac{n(3+n)}{4\cdot 8}x^{-4}+\frac{n(4+n)(5+n)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6}$$
$$+\frac{n(5+n)(6+n)(7+n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^{-8}+\text{etc.}\Big),$$

terminus generalis colligitur

$$\frac{x^{-n-2\beta}}{2^{n+1}}\cdot\frac{n(\beta+1+n)(\beta+2+n)(\beta+3+n)\cdots(2\beta-1+n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\cdots\cdot 4\beta},$$

unde potestatis negativae $x^{-n-2\beta}$ coefficiens est

$$2^{-n-1}\cdot\frac{n(\beta+1+n)(\beta+2+n)(\beta+3+n)\cdots(2\beta-1+n)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\cdots\cdot 4\beta}.$$

Statuatur iam haec potestas praecedenti $x^{n-2\alpha}$ aequalis, seu $n-2\alpha=-n-$ fitque $\alpha=n+\beta$; sicque ipsae illae potestates negativae maiores prod quarum coefficientes in priori serie non sponte evanescunt. Ostendi oportet harum potestatum coefficientes ex utraque serie ortos inter se aequales et se mutuo destruere, ubi quidem iam sponte patet alterum positivum alterum negativum, ex quo utriusque aequalitas demonstrari d

18. Cum sit $\alpha = n + \beta$, erit $n = \alpha - \beta$, ideoque demonstrandum

$$2^{\alpha-\beta-1} \cdot \frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\cdots\cdot 4\alpha}$$

$$= 2^{\beta-\alpha-1} \cdot \frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\cdots\cdot 4\beta},$$

seu utrinque per $2^{\alpha+\beta+1}$ multiplicando

$$2^{2\alpha} \cdot \frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\cdots\cdot 4\alpha} = 2^{2\beta} \cdot \frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot\cdots\cdot 4\beta}.$$

Cum iam in priori forma factorum denominatoris numerus sit $= \alpha$ et omnes per quaternarium sint divisibiles, hos factores ita repraesentare licebit:

$$4^{\alpha}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\alpha = 2^{2\alpha}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\alpha;$$

simili modo denominator alterius formae ita exprimi poterit:

$$4^{\beta}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\beta = 2^{2\beta}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\beta,$$

unde haec aequalitas ostendenda superest

$$\frac{n(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\alpha} = \frac{n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+\beta-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\beta},$$

quae per crucem multiplicata manifesto utrinque praebet idem productum

$$n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(\alpha+\beta-1).$$

19. Paradoxon ergo initio propositum satis distincte explicatum simulque ratio patet, cur haec aequatio:

$$\cos. n\varphi = 2^{n-1}x^n\Big(1 - \frac{n}{4}x^{-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}x^{-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^{-6} + \cdots$$

tum demum sit veritati consentanea, quando n denotat numerum integrum positivum simulque omnes potestates ipsius x exponentes negativos habentes expungantur, et cur his restrictionibus non observatis haec expressio in errorem praecipitet.

$$\varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{8}x^{-2} - \frac{1\cdot 5}{8\cdot 16}x^{-4} - \frac{1\cdot 7\cdot 9}{8\cdot 16\cdot 24}x^{-6} - \frac{1\cdot 9\cdot 11\cdot 13}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2x}}\left(1 + \frac{1}{8}x^{-2} + \frac{1\cdot 7}{8\cdot 16}x^{-4} + \frac{1\cdot 9\cdot 11}{8\cdot 16\cdot 24}x^{-6} + \frac{1\cdot 11\cdot 13\cdot 15}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^{-8} + \text{etc.}\right),$$

n ordinem secundum potestates redacta dat

$$\cdot\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8xx} + \frac{1}{2\cdot 8x^3} - \frac{1\cdot 5}{8\cdot 16x^4} + \frac{1\cdot 7}{2\cdot 8\cdot 16x^5} - \frac{1\cdot 7\cdot 9}{8\cdot 16\cdot 24x^6}\right.$$

$$\left. + \frac{1\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 8\cdot 16\cdot 24x^7} - \text{etc.}\right),$$

quilibet coefficiens per praecedentem dividatur, haec resultat series:

$$\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{4},\quad -\frac{1}{2},\quad -\frac{5}{8},\quad -\frac{7}{10},\quad -\frac{9}{12},\quad -\frac{11}{14}\quad \text{etc.},$$

it

$$\text{s. } \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^{-2} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^{-3} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^{-4} + \text{etc.}\right)$$

o manifesto habebitur

$$\cos.\frac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1+x}{2}},$$

nstat.

. Evolvamus etiam casum $n = \frac{1}{3}$, ac reperimus

$$= \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{4}}\left(1 - \frac{1}{12}x^{-2} - \frac{1\cdot 8}{12\cdot 24}x^{-4} - \frac{1\cdot 11\cdot 14}{12\cdot 24\cdot 36}x^{-6} - \frac{1\cdot 14\cdot 17\cdot 20}{12\cdot 24\cdot 36\cdot 48}x^{-8} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt[3]{2x}}\left(1 + \frac{1}{12}x^{-2} + \frac{1\cdot 10}{12\cdot 24}x^{-4} + \frac{1\cdot 13\cdot 16}{12\cdot 24\cdot 36}x^{-6} + \frac{1\cdot 16\cdot 19\cdot 22}{12\cdot 24\cdot 36\cdot 48}x^{-8} + \text{etc.}\right),$$

quae binae series ita coniungantur:

$$\cos.\frac{1}{3}\varphi=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{12\sqrt[3]{4}}x^{-\frac{5}{3}}$$

$$+\frac{1}{12\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{7}{3}}-\frac{1\cdot 8}{12\cdot 24\sqrt[3]{4}}x^{-\frac{11}{3}}+\frac{1\cdot 10}{12\cdot 24\sqrt[3]{16}}x^{-\frac{13}{3}}-$$

Iam ad irrationalitatem tollendam statuatur $x^{\frac{1}{3}}=y\sqrt[3]{4}$ seu $x=4y^3$, a

$$\cos.\frac{1}{3}\varphi=y+\frac{1}{4y}-\frac{1}{12\cdot 4^2y^5}+\frac{1}{12\cdot 4^3y^7}-\frac{1\cdot 8}{12\cdot 24\cdot 4^4y^{11}}$$

$$+\frac{1\cdot 10}{12\cdot 24\cdot 4^5y^{13}}-\frac{1\cdot 11\cdot 14}{12\cdot 24\cdot 36\cdot 4^6y^{17}}+$$

Sit porro $y=\frac{z}{2}$, erit

$$\cos.\frac{1}{3}\varphi=\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6z^5}+\frac{1}{6z^7}-\frac{1\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 6z^{11}}$$

$$+\frac{1\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 6z^{13}}-\frac{1\cdot 11\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 6\cdot 9z^{17}}+\frac{1\cdot 13\cdot 16}{2\cdot 3\cdot 6\cdot 9z^{19}}$$

seu

$$2\cos.\frac{1}{3}\varphi=z+\frac{1}{z}-\frac{1}{3z^5}+\frac{1}{3z^7}-\frac{1\cdot 8}{3\cdot 6z^{11}}$$

$$+\frac{1\cdot 10}{3\cdot 6z^{13}}-\frac{1\cdot 11\cdot 14}{3\cdot 6\cdot 9z^{17}}+\frac{1\cdot 13\cdot 16}{3\cdot 6\cdot 9z^{19}}-$$

22. In genere autem casus $x=\frac{1}{2}$, unde fit $\varphi=60^0$ seu $\varphi=$ tante π semicircumferentiam circuli, cuius radius $=1$, omni attenti videtur. Nam, ob $2x=1$, fit

$$\cos.\frac{n}{3}\pi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n(n-5)(n-6)(n-}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{1}+\frac{n(n+3)}{1\cdot 2}+\frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n(n+5)(n+6)(n+}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$$

ubi notari convenit utriusque seriei summam seorsim sumtam ess riam, et quia utraque est divergens, minime licet eas pro lubitu Veluti si termini ordinate coniungerentur, prodiret

$$\cos.\frac{n}{3}\pi = 1 + \frac{nn}{1\cdot 2} + \frac{9nn}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{nn(nn+107)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.},$$

sequeretur fore $\cos.\frac{n}{3}\pi > 1$, quod tamen est absurdum. Interim tamen rum illarum prioris summa est

$$\frac{1}{2}\left(\cos.\frac{n}{3}\pi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{n}{3}\pi\right),$$

erioris vero

$$\frac{1}{2}\left(\cos.\frac{n}{3}\pi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{n}{3}\pi\right),$$

e nullum est dubium, quin ambae coniunctim praebeant $\cos.\frac{n}{3}\pi$, etiamsi pateat, quemadmodum hic valor ex coniunctione facta elici possit. Hinc denuo insigne paradoxon resultat, cuius explicatio haud parum ardua ur; sine dubio autem ex serierum divergentia est petenda et series signis nantibus ita scribenda terminorum numero neque pari neque impari tato

$$\cos.\frac{n}{3}\pi = 2 - \frac{n}{1} + \frac{n}{1} - \frac{n(3-n)}{1\cdot 2}$$
$$+ \frac{n(3+n)}{1\cdot 2} - \frac{n(4-n)(5-n)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n(4+n)(5+n)}{1\cdot 2\cdot 3} - \text{etc.},$$

ut sit

$$\frac{2-2\cos.\frac{n}{3}\pi}{n} = \frac{3-n}{1\cdot 2} - \frac{3+n}{1\cdot 2} + \frac{(4-n)(5-n)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{(4+n)(5+n)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+ \frac{(5-n)(6-n)(7-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{etc.}$$

ommoda autem effugere non licet, nisi quantitas x indefinita relinquatur seriei termini secundum eius potestates disponantur.

23. Verum etiam hoc modo haud leves difficultates relinquuntur; si enim orum n sumamus infinite parvum, ut sit $\cos.n\varphi = 1 - \frac{1}{2}nn\varphi\varphi$, ob

$$2^n x^n = 1 + nl2x + \frac{1}{2}nn(l2x)^2$$

$$\frac{1}{2^n x^n} = 1 - nl2x + \frac{1}{2}nn(l2x)^2$$

habebimus, in singulis terminis potestates ipsius n quadrato altiores negligen

$$2 - nn\varphi\varphi = +\left(1 + nl2x + \tfrac{1}{2}nn(l2x)^2\right)\times$$

$$\left(1 - \frac{n}{4xx} - \frac{3n - nn}{4\cdot 8x^4} - \frac{20n - 9nn}{4\cdot 8\cdot 12x^6} - \frac{210n - 107nn}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16x^8} - \text{etc.}\right.$$

$$+\left(1 - nl2x + \tfrac{1}{2}nn(l2x)^2\right)\times$$

$$\left(1 + \frac{n}{4xx} + \frac{3n + nn}{4\cdot 8x^4} + \frac{20n + 9nn}{4\cdot 8\cdot 12x^6} + \frac{210n + 107nn}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16x^8} + \text{etc.}\right.$$

Atque facta evolutione tam partes finitae quam infinite parvae ipso nume n affectae se mutuo destruunt, reliquae vero per nn divisae praebent.

$$\varphi\varphi = 2l2x\left(\frac{1}{4xx} + \frac{3}{4\cdot 8x^4} + \frac{20}{4\cdot 8\cdot 12x^6} + \frac{210}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16x^8} + \text{etc.}\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{4\cdot 8x^4} + \frac{9}{4\cdot 8\cdot 12x^6} + \frac{107}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16x^8} + \text{etc.}\right) - (l2x)^2$$

existente $x = \cos.\varphi$. Ad legem huius progressionis clarius percipiendum pon mus $2x = y$, ut sit

$$y = 2\cos.\varphi$$

et

$$\frac{3}{2} = A = \frac{3}{2},\quad A\cdot\frac{1}{3} \qquad = \alpha = \frac{1}{2},$$

$$\frac{4\cdot 5}{2\cdot 3} = B = \frac{10}{3},\quad B\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \qquad = \beta = \frac{3}{2} = A,$$

$$\frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4} = C = \frac{35}{4},\quad C\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \qquad = \gamma = \frac{107}{24} = B + \frac{1}{2}AA,$$

$$\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = D = \frac{126}{5},\ D\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) \qquad = \delta = \frac{55}{4} = C + AB,$$

$$\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = E = 77,\quad E\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) = \varepsilon = \frac{15797}{360} = D + AC + \frac{1}{2}B$$

etc. etc.

...ae

$$qq = 2ly\left(\frac{1}{yy} + \frac{A}{y^4} + \frac{B}{y^6} + \frac{C}{y^8} + \frac{D}{y^{10}} + \text{etc.}\right)$$

$$- 2\left(\frac{\alpha}{y^4} + \frac{\beta}{y^6} + \frac{\gamma}{y^8} + \frac{\delta}{y^{10}} + \text{etc.}\right) - (ly)^2,$$

...i brevitatis gratia statuamus

$$P = \frac{1}{yy} + \frac{A}{y^4} + \frac{B}{y^6} + \frac{C}{y^8} + \text{etc.},$$

$$qq = 2Ply - PP - (ly)^2$$

$$qq = -(ly - P)^2,$$

...est absurdum.

21. Omnino autem notatu digna est relatio, quam hic inter numerorum ..., C, D etc. et numerorum α, β, γ, δ etc. ordines observavi et quae ...modissime ita referri potest, ut sit

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.} = \frac{1}{2}(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.})^2,$$

... demonstratio haud parum ardua videtur. Operae igitur pretium est ...em horum numerorum accuratius contemplari:

$\ldots\frac{3}{2} = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot 1,$	$\alpha = A\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot 1^2,$
$\ldots\frac{\cdot 5}{\cdot 3} = \frac{4\cdot 5}{3\cdot 3}A,$	$\beta = B\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 1\cdot A,$
$\ldots\frac{\cdot 6\cdot 7}{\cdot 3\cdot 4} = \frac{6\cdot 7}{4\cdot 4}B,$	$\gamma = C\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) = 1\cdot B + \frac{1}{2}AA,$
$\ldots\frac{\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{8\cdot 9}{5\cdot 5}C,$	$\delta = D\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) = 1\cdot C + AB,$
$\ldots\frac{\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{10\cdot 11}{6\cdot 6}D$	$\varepsilon = E\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) = 1\cdot D + AC + \frac{1}{2}BB$
etc.	etc.

25. Consideremus hanc proprietatem in solis numeris integris ...
mus has binas progressiones:

$$1 = 1,$$

$$\mathfrak{A} = 3, \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{A}\cdot\frac{1}{3},$$

$$\mathfrak{B} = 4\cdot 5, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{B}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right),$$

$$\mathfrak{C} = 5\cdot 6\cdot 7, \qquad \mathfrak{c} = \mathfrak{C}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right),$$

$$\mathfrak{D} = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9, \qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{D}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right),$$

$$\mathfrak{E} = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11, \qquad \mathfrak{e} = \mathfrak{E}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right),$$

$$\mathfrak{F} = 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13 \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13} \ldots\right.$$

etc. etc.

eritque ut sequitur:

$$\mathfrak{a} = 2\cdot\frac{1\cdot 1}{2}, \quad \mathfrak{b} = 3\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{c} = 4\mathfrak{B} + 6\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{2}, \quad \mathfrak{d} = 5\mathfrak{C} + 10\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{e} = 6\mathfrak{D} + 15\mathfrak{A}\mathfrak{C} + 20\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}{2}, \quad \mathfrak{f} = 7\mathfrak{E} + 21\mathfrak{A}\mathfrak{D} + 35\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ [+\text{ etc.}] \ldots$$

seu

$$2\mathfrak{f} = 7\cdot 1\mathfrak{E} + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mathfrak{C}\mathfrak{B} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\mathfrak{D} \ldots$$

$$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\mathfrak{E}\cdot 1,$$

unde lex progressionis est manifesta. Vel erit

$$\frac{\mathfrak{a}}{2} + \frac{\mathfrak{b}z}{2\cdot 3} + \frac{\mathfrak{c}zz}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\mathfrak{d}z^3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mathfrak{A}z}{2} + \frac{\mathfrak{B}zz}{2\cdot 3} + \frac{\mathfrak{C}z^3}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\mathfrak{D}z^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \ldots\right.$$

26. Pro insigni autem hac proprietate sequentem inveni demonstr...
qua simul indoles huiusmodi formularum penitius perspicietur. Pona...

vatur haec series secundum potestates indicis n, fingaturque

$$\cos. n\varphi - \sqrt{-1}\cdot \sin. n\varphi = y^n(1 + nP + nnQ + n^3R + n^4S + \text{etc.});$$

forma quo facilius intelligi possit, novo signandi modo utamur, scilicet positis quotcunque numeris α, β, γ, δ etc.

haec scriptio:	denotat
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(1)}$	summam singulorum $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$,
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(2)}$	summam productorum ex binis,
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(3)}$	summam productorum ex ternis,
$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(4)}$	summam productorum ex quaternis
etc.	etc.,

observo, si index suffixus aequalis sit multitudini numerorum, hac scriptio omnium productum exprimi, tum vero semper esse

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ etc.})^{(0)} = 1.$$

autem scribendi modo adhibito erit

$$P = \frac{1}{1}y^2 + \frac{(3)^{(1)}}{2}y^4 + \frac{(4,5)^{(2)}}{2\cdot 3}y^6 + \frac{(5,6,7)^{(3)}}{2\cdot 3\cdot 4}y^8 + \frac{(6,7,8,9)^{(4)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.},$$

$$Q = \frac{(3)^{(0)}}{2}y^4 + \frac{(4,5)^{(1)}}{2\cdot 3}y^6 + \frac{(5,6,7)^{(2)}}{2\cdot 3\cdot 4}y^8 + \frac{(6,7,8,9)^{(3)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.},$$

$$R = \frac{(4,5)^{(0)}}{2\cdot 3}y^6 + \frac{(5,6,7)^{(1)}}{2\cdot 3\cdot 4}y^8 + \frac{(6,7,8,9)^{(2)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.},$$

$$S = \frac{(5,6,7)^{(0)}}{2\cdot 3\cdot 4}y^8 + \frac{(6,7,8,9)^{(1)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.},$$

$$T = \frac{(6,7,8,9)^{(0)}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}y^{10} + \text{etc.}$$

etc.

Cum autem sit, uti constat,

$$\cos. \lambda n \varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. \lambda n \varphi = (\cos. n \varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. n \varphi,$$

erit quoque

$$\cos. \lambda n \varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. \lambda n \varphi = y^{\lambda n}(1 + nP + n^2 Q + n^3 R +$$

ideoque

$$1 + \lambda n P + \lambda^2 n^2 Q + \lambda^3 n^3 R + \text{etc.} = (1 + nP + n^2 Q + n^3 R +$$

quae aequalitas subsistere nequit, nisi sit

$$Q = \frac{1}{2} P^2, \quad R = \frac{1}{2 \cdot 3} P^3, \quad S = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} P^4, \quad T = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} P^5$$

Atque hinc porro colligere licet, cum sit

$$\cos. n\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi = e^{-n\varphi\sqrt{-1}},$$

nunc autem invenerimus

$$\cos. n\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin. n\varphi = y^n e^{nP} = e^{n(P+ly)},$$

fore

$$-\varphi\sqrt{-1} = P + ly$$

ideoque

$$\varphi\varphi = -(P + ly)^2,$$

quod cum videatur absurdum, ita resolvi oportet, quod P semper tas imaginaria; sicque explicatur paradoxon supra § 23 allatum.

28. Verum ut ad propositum revertar, cum sit $Q = \frac{1}{2} PP$, s gratia valores § 24 explicatos introducamus, erit

$$P = yy + Ay^4 + By^6 + Cy^8 + Dy^{10} + \text{etc.}$$

$$Q = \alpha y^4 + \beta y^6 + \gamma y^8 + \delta y^{10} + \text{etc.},$$

unde valoribus Q et $\frac{1}{2}PP$ aequatis nanciscimur supra observatas relation
scilicet

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = A, \quad \gamma = B + \frac{1}{2}AA, \quad \delta = C + AB, \quad \varepsilon = D + AC + \frac{1}{2}BI$$

et ita porro. Hac igitur demonstratione confecta aliarum similium formular
complicatarum resolutionem coronidis loco subiungam.

PROBLEMA

29. *Hanc formulam:*

$$a(1 + \sqrt{(1 - x)})^n$$

in seriem infinitam resolvere secundum potestates ipsius x progredientem.

SOLUTIO

Statuatur

$$z = a(1 + \sqrt{(1 - x)})^n$$

et posita serie, quae quaeritur,

$$z = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

evidens est fore $A = 2^n a$, unde sequentes coefficientes simili modo ut su
definire licebit. Sumtis logarithmis habemus

$$lz = la + nl(1 + \sqrt{(1 - x)})$$

et differentiando

$$\frac{dz}{z} = -\frac{ndx}{2\sqrt{(1-x)}} : (1 + \sqrt{(1 - x)}).$$

Multiplicetur numerator ac denominator per $(1 - \sqrt{(1 - x)})$ prodibitque

$$\frac{dz}{z} = -\frac{ndx(1 - \sqrt{(1 - x)})}{2x\sqrt{(1 - x)}} = \frac{ndx}{2x} - \frac{ndx}{2x\sqrt{(1 - x)}}$$

Ponatur

$$z = x^{\frac{n}{2}} \nu,$$

ut sit

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\nu}{\nu} + \frac{n dx}{2x},$$

fietque

$$\frac{d\nu^2}{\nu\nu} = \frac{nn dx^2}{4xx(1-x)}$$

seu

$$4xx(1-x) d\nu^2 = nn\nu\nu dx^2,$$

quae aequatio differentiata et per $2d\nu$ divisa praebet

$$4xx(1-x) dd\nu + 2x(2-3x) dx d\nu - nn\nu dx^2 = $$

Cum nunc sit

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{dz}{z} - \frac{n dx}{2x},$$

erit differentiando

$$\frac{dd\nu}{\nu} - \frac{d\nu^2}{\nu\nu} = \frac{ddz}{z} - \frac{dz^2}{zz} + \frac{n dx^2}{2xx};$$

at

$$\frac{d\nu^2}{\nu\nu} = \frac{dz^2}{zz} - \frac{n dx dz}{xz} + \frac{nn dx^2}{4xx},$$

ergo

$$\frac{dd\nu}{\nu} = \frac{ddz}{z} - \frac{n dx dz}{xz} + \frac{n(n+2) dx^2}{4xx},$$

unde facta substitutione:

$$4xx(1-x)\frac{ddz}{z} - 4nx(1-x)\frac{dx dz}{z} + n(n+2)(1-x) d$$

$$+ 2x(2-3x)\frac{dx dz}{z} - n(2-3x) dx^2$$

$$- nn dx^2$$

seu

$$4x(1-x) ddz - 4(n-1) dx dz + 2(2n-3) x dx dz - n(n-$$

Cum hic variabilis x partim unicam, partim duas dimensiones obt
distinguendo hos terminos

$$+4xddz - 4(n-1)dxdz$$

$$-4xxddz + 2(2n-3)xdxdz - n(n-1)zdx^2 = 0$$

statuamus

$$z = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \cdots + Mx^i + Nx^{i+1} + \text{etc.}$$

et potestatis x^i coefficiens erit

$$+N(4i(i+1) - 4(n-1)(i+1)) + M(-4i(i-1) + 2(2n-3)i - n(n-$$

qui cum evanescere debeat, habebitur

$$N = \frac{(2i-n)(2i-n+1)}{4(i+1)(i-n+1)}M.$$

Nunc autem novimus esse

$$A = 2^n a,$$

quare sequentes coefficientes erunt

$$B = -\frac{n(n-1)}{4(n-1)}A = -\frac{n}{4}A,$$

$$C = -\frac{(n-2)(n-3)}{8(n-2)}B = +\frac{n(n-3)}{4\cdot 8}A,$$

$$D = -\frac{(n-4)(n-5)}{12(n-3)}C = -\frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}A$$

etc. etc.

Sumatur $a = 2^{-n}$, ut fiat $A = 1$, eritque

$$\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n = 1 - \frac{n}{4}x + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}xx - \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^3$$

$$+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 - \text{etc.},$$

quae est series quaesita.

COROLLARIUM 1

30. Sumto x negativo sequentis seriei

$$1 + \frac{n}{4}x + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}xx + \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4$$

summa erit

$$= \left(\frac{1+\sqrt{(1+x)}}{2}\right)^n,$$

ex cuius combinatione cum praecedente alternis tantum terminis summa assignari poterit.

COROLLARIUM 2

31. Si exponens n negative capiatur, binae sequentes series ac revocabuntur:

$$1 + \frac{n}{4}x + \frac{n(n+3)}{4\cdot 8}xx + \frac{n(n+4)(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4$$

huius seriei summa est

$$= \left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-n} = 2^n\left(\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{x}\right)^n.$$

Tum

$$1 - \frac{n}{4}x + \frac{n(n+3)}{4\cdot 8}xx - \frac{n(n+4)(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4$$

cuius summa est

$$= 2^n\left(\frac{\sqrt{(1+x)}-1}{x}\right)^n.$$

PROBLEMA

32. *Hanc formulam*

$$\left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n$$

in seriem infinitam resolvere, cuius termini secundum potestates ipsius x direntur.

SOLUTIO

Posito

$$z=\left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n$$

erit quadratis sumendis

$$zz=\left(\frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{2}\right)^n$$

hincque

$$z=\left(\frac{1+\sqrt{(1-xx)}}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

quae forma in priori continetur, si modo ibi loco x et n scribatur $\frac{n}{2}$, quocirca colligitur statim series quaesita:

$$1-\frac{n}{8}xx+\frac{n(n-6)}{8\cdot 16}x^4-\frac{n(n-8)(n-10)}{8\cdot 16\cdot 24}x^6+\frac{n(n-10)(n-12)(n-14)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^8$$

quippe cuius summa est

$$=\left(\frac{\sqrt{(1+x)}+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^n.$$

COROLLARIUM

33. Sumto n negativo, ut prodeat haec series:

$$1+\frac{n}{8}xx+\frac{n(n+6)}{8\cdot 16}x^4+\frac{n(n+8)(n+10)}{8\cdot 16\cdot 24}x^6+\frac{n(n+10)(n+12)(n+14)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}x^8$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$\left(\frac{\sqrt{(1+x)}-\sqrt{(1-x)}}{x}\right)^n.$$

SCHOLION

34. Omnes series istas, quarum summam hic assignavi, in hac
complecti licet:

$$s = 1 + \frac{n}{1}y + \frac{n(n+3)}{1\cdot 2}yy + \frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}y^4$$

eritque

$$s = \left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2}\right)^{-n};$$

unde patet, si fuerit $4y > 1$, seriei summam esse imaginariam, realem
si sit $4y < 1$. Casu autem $y = \frac{1}{4}$ erit, uti iam supra observavimus,

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4\cdot 8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16} + \text{etc.} =$$

Verum illa series pluribus modis transformari potest, ex quibus hun
casum affero, qui oritur differentialibus sumtis; erit scilicet

$$\frac{ds}{dy} = n + \frac{n(n+3)}{1}y + \frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2}yy + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 +$$

At est

$$\frac{ds}{dy} = +n\left(\frac{1+\sqrt{(1-4y)}}{2}\right)^{-n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-4y)}}.$$

aro per n dividendo, huius seriei

$$1 + \frac{n+3}{1} y + \frac{(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2} yy + \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \text{etc.}$$

nma est

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-4y)}} \left(\frac{1 + \sqrt{(1-4y)}}{2} \right)^{-n-1}.$$

1 scribendo $n = m - 3$, huius seriei

$$1 + \frac{m}{1} y + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} yy + \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3$$

$$+ \frac{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y^4 + \text{etc.}$$

nma est

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-4y)}} \left(\frac{1 + \sqrt{(1-4y)}}{2} \right)^{-m+2}.$$

CONTINUATIO FRAGMENTORUM EX ADVERS[IS] MATHEMATICIS DEPROMTORUM[1])

Ex Commentatione 819 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 1, 1862, p. 506—513

106
(KRAFFT)

PROBLEMA

Si habeatur haec series

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+4a} - \text{etc.},$$

eius quadratum s^2 commode per seriem exprimere.

Erit autem

$$s^2 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \frac{1}{(1+3a)^2} + \text{etc.}$$

$$- \frac{2}{1\cdot(1+a)} - \frac{2}{(1+a)(1+2a)} - \frac{2}{(1+2a)(1+3a)} - \text{etc.} \cdots (= -$$

$$+ \frac{2}{1\cdot(1+2a)} + \frac{2}{(1+a)(1+3a)} + \frac{2}{(1+2a)(1+4a)} + \text{etc.} \cdots (= +$$

$$- \frac{2}{1\cdot(1+3a)} - \frac{2}{(1+a)(1+4a)} - \frac{2}{(1+2a)(1+5a)} - \text{etc.} \cdots (= -$$

etc.

Erit vero

$$A = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{(1+a)(1+2a)} + \frac{1}{(1+2a)(1+3a)} + \text{etc.}$$

1) Vide notam 1 ad p. 504 vol. I6 adiectam. C. B.

$$\ldots \frac{1}{1+a} \ldots \frac{1}{1+a} \ldots \frac{1}{1+2a} \ldots \frac{1}{1+2a} \ldots \frac{1}{1+3a} + \text{etc.})$$

$$A = \frac{1}{a} \cdot 1.$$

er

$$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+4a} + \frac{1}{1+3a} - \text{etc.}\right)$$

$$B = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a}\right).$$

modo

$$\ldots\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+3a} + \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+4a} + \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{1+5a} + \frac{1}{1+3a} - \frac{1}{1+6a} + \text{etc.}\right)$$

$$C = \frac{1}{3a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right)$$

porro. Quocirca fiet

$$\ldots^2 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \frac{1}{(1+3a)^2} + \text{etc.}$$

$$- \frac{2}{a} \cdot 1 + \frac{2}{2a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2}{3a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{etc.},$$

artis posterioris valor ita investigetur: Ponatur

$$z = -\frac{2x}{a} \cdot 1 + \frac{2x^2}{2a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2x^3}{3a}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{etc.}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{a} \cdot 1 + \frac{2x}{a}\left(1 + \frac{1}{1+a}\right) - \frac{2x^2}{a}\left(1 + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2a}\right) + \text{etc.},$$

$$\frac{dz}{x} = -\frac{2x}{a} \cdot 1 + \frac{2x^2}{a}\left(1 + \frac{1}{1+a}\right) - \text{etc.}$$

adeoque

$$\frac{(1+x)dz}{dx} = -\frac{2}{a} + \frac{2x}{a(1+a)} - \frac{2x^2}{a(1+2a)} + \text{etc.}$$

Ponatur $x = y^a$, ut habeatur

$$\frac{(1+y^a)dz}{ay^{a-1}dy} = -\frac{2}{a} + \frac{2y^a}{a(1+a)} - \frac{2y^{2a}}{a(1+2a)} + \text{etc.}$$

seu

$$\frac{(1+y^a)dz}{y^{a-2}dy} = -\frac{2y}{1} + \frac{2y^{a+1}}{1+a} - \frac{2y^{2a+1}}{1+2a} + \text{etc.},$$

$$\frac{d\cdot\frac{(1+y^a)dz}{y^{a-2}dy}}{dy} = -2 + 2y^a - 2y^{2a} + 2y^{3a} - \text{etc.} = \frac{-2}{1+y^a},$$

ergo

$$\frac{(1+y^a)dz}{y^{a-2}dy} = -2\int\frac{dy}{1+y^a}$$

et

$$dz = \frac{-2y^{a-2}dy}{1+y^a}\int\frac{dy}{1+y^a},$$

consequenter

$$z = -2\int\frac{y^{a-2}dy}{1+y^a}\int\frac{dy}{1+y^a}.$$

Posito ergo $y = 1$ erit quadratum quaesitum

$$s^2 = 1 + \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+2a)^2} + \text{etc.} + z.$$

Hic vero occurrit casus memorabilis, quando $a = 2$ ideoque

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4};$$

tum autem fit

$$z = -2\int\frac{dy}{1+y^2}\int\frac{dy}{1+y^2} = -(\text{Arc. tang. } y)^2 = -\frac{\pi^2}{16},$$

unde tandem oritur

$$s^2 = \frac{\pi^2}{16} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} - \frac{\pi^2}{16}$$

...oque

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}=\frac{\pi^2}{8}.$$

... autem fuerit $a=1$ ideoque

$$s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}=\log.2,$$

$$z=-2\int\frac{dy}{y(1+y)}\int\frac{dy}{1+y}=-2\int\frac{dy\log.(1+y)}{y(1+y)}$$

...ponendum erit post integrationem $y=1$, eritque

$$s^2=(\log.2)^2=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}-2\int\frac{dy\log.(1+y)}{y(1+y)}$$

Adversaria mathematica t. I, p. 162—164.

107
(N. Fuss)

THEOREMA

Proposita serie potestatum quacunque

$$P=1+x^\alpha+x^\beta+x^\gamma+x^\delta+\text{etc.}$$

...uc sumatur potestas exponentis λ, nempe P^λ, in qua evoluta occurrat terminus ...^{n}, eius coëfficiens $[n]$ ita pendebit ab aliquibus praecedentium, ut sit

$$n[n]=\frac{+\lambda\alpha}{-(n-\alpha)}[n-\alpha]\frac{+\lambda\beta}{-(n-\beta)}[n-\beta]\frac{+\lambda\gamma}{-(n-\gamma)}[n-\gamma]\frac{+\text{etc.}}{-\text{etc.}},$$

... expressio eousque est continuanda, quamdiu numeri $n-\alpha$, $n-\beta$, $n-\gamma$ etc. ... fiunt negativi.

DEMONSTRATIO

Ponatur $P^\lambda=S$, erit

$$lS=\lambda lP \quad\text{et}\quad \frac{dS}{S}=\frac{\lambda dP}{P}$$

...ue

$$PdS=\lambda SdP,$$

quae aequalitas ita repraesentetur:

$$P \cdot \frac{x\,dS}{dx} = \lambda S \cdot \frac{x\,dP}{dx}.$$

Cum igitur sit

$$P = 1 + x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + \text{etc.},$$

erit

$$\frac{x\,dP}{dx} = \alpha x^\alpha + \beta x^\beta + \gamma x^\gamma + \delta x^\delta + \text{etc.}$$

Iam in serie S occurrat terminus $[n]x^n$, praeter quem potestates, quae per $\frac{x\,dP}{dx}$ multiplicatae producere possunt termini ita repraesententur:

$$S = \cdots + [n]x^n + [n-\alpha]x^{n-\alpha} + [n-\beta]x^{n-\beta}$$

Hinc ergo erit

$$\lambda S \frac{x\,dP}{dx} = \cdots \lambda\alpha[n-\alpha]x^n + \lambda\beta[n-\beta]x^n + \lambda\gamma[n-$$

Deinde cum ex iisdem terminis sit

$$\frac{x\,dS}{dx} = \cdots n[n]x^n + (n-\alpha)[n-\alpha]x^{n-\alpha} + (n-\beta)[n-$$

quae in P ducta pro potestate x^n praebet sequentes term

$$n[n]x^n + (n-\alpha)[n-\alpha]x^n + (n-\beta)[n-\beta]x^n + (n-\gamma)$$

Hi igitur termini x^n utrinque debent poni aequales, unde

$$n[n] + (n-\alpha)[n-\alpha] + (n-\beta)[n-\beta] + (n-\gamma)[n$$
$$= \lambda\alpha[n-\alpha] + \lambda\beta[n-\beta] + \lambda\gamma[n-\gamma] + \lambda\delta[n-$$

unde conficitur

$$n[n] = \begin{matrix}\lambda\alpha \\ -(n-\alpha)\end{matrix}[n-\alpha] \begin{matrix}+\lambda\beta \\ -(n-\beta)\end{matrix}[n-\beta] \begin{matrix}+\lambda\gamma \\ -(n-\gamma)\end{matrix}[n$$

Q. E. D.

COROLLARIUM

Cum in serie P exponentes ipsius x sint $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., in serie $S = P^{\lambda}$ potestates non occurrunt, nisi quarum exponentes sunt summa λ terminorum huius seriei $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., unde si in hac serie S omnes plane potestates ipsius x occurrunt, id erit indicio omnes plane numeros reduci posse ad summam λ terminorum istius seriei $0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. At si quaedam potestas x^n non occurrat, tum eius coëfficiens $[n]$ aequabitur nihilo. Manifestum autem est nullum coëfficientem fieri posse negativum.

Adversaria mathematica t. 1, p. 335, 336.

108

(N. Fuss)

THEOREMA

Summa huius seriei:

$$S = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \text{etc.}$$

$$S = \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2}(l2)^2.$$

DEMONSTRATIO

Colligantur primo ultimi termini cuiusque membri, qui erunt

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6}.$$

Deinde his terminis exclusis colligantur denuo termini extremi cuiusque membri

$$-\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} - \text{etc.} = -1.$$

His deletis colligantur denuo ultimi termini, qui sunt

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Simili modo ultimi sequentes erunt

$$-\frac{1}{1\cdot 4}-\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 6}-\frac{1}{4\cdot 7}-\text{etc.}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

Eodem modo sequentium summa erit

$$+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

sicque porro. Quare si statuamus

$$t=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{e}$$

erit

$$S=\frac{\pi\pi}{6}-t.$$

Iam istam seriem postremam ita repraesentemus:

$$t=x-\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^3}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{et}$$

unde sumto $x=1$ nostra series t prodit. Nunc autem fiet

$$\frac{dt}{dx}=1-x\left(1+\frac{1}{2}\right)+x^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-x^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{e}$$

unde termini primi singulorum terminorum iuncti dant

$$1-x+xx-x^3+\text{etc.}=\frac{1}{1+x}.$$

Colligantur porro secundi

$$-\frac{1}{2}(x-xx+x^3-x^4+\text{etc.})=\frac{-\frac{1}{2}x}{1+x}.$$

Tertii dabunt

$$+\frac{1}{3}(xx-x^3+x^4-x^5+\text{etc.})=\frac{\frac{1}{3}xx}{1+x}.$$

Sequentes erunt

$$\frac{-\frac{1}{4}x^3}{1+x},\quad \frac{+\frac{1}{5}x^4}{1+x}\quad \text{etc.}$$

Quamobrem erit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}xx - \frac{1}{4}x^3 + \text{etc.}}{1+x}$$

fractio, cuius numerator $= \frac{1}{x}l(1+x)$, sicque

$$\frac{dt}{dx} = \frac{l(1+x)}{x(1+x)}.$$

Cum igitur sit

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x},$$

per partes erit

$$dt = \frac{dx}{x}l(1+x) - \frac{dx}{1+x}l(1+x),$$

cuius posterioris membri integrale est

$$-\frac{1}{2}(l(1+x))^2 = -\frac{1}{2}(l2)^2.$$

Pro priore membro

$$\int \frac{dx}{x}l(1+x),$$

id erit

$$\int \frac{dx}{x}\left(x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}\right)$$

$$= x - \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc.}$$

Unde facto $x = 1$ erit haec pars

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12}.$$

Consequenter habebimus

$$t = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2,$$

ergo summa seriei propositae

$$S = \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2}(l2)^2.$$

THEOREMA

Sequentis seriei

$$S = 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{7}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \text{etc.}$$

summa erit

$$S = \frac{3\pi\pi}{32}.$$

DEMONSTRATIO

Colligantur hic iterum termini postremi singulorum membrorum

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8}.$$

His deletis reliquorum ultimi termini colligantur, qui sunt

$$-\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} - \text{etc.} = -\frac{1}{2}\cdot 1.$$

Sequentium ultimi dant

$$+\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \text{etc.} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right);$$

sequentes erunt

$$-\frac{1}{1\cdot 7} - \frac{1}{3\cdot 9} - \frac{1}{5\cdot 11} - \text{etc.} = -\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

et ita porro. Hinc erit

$$S = \frac{\pi\pi}{8} - t$$

existente

$$t = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$$

Statuatur

$$t = \frac{xx}{2}\cdot 1 - \frac{x^4}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$$

fietque

$$\frac{dt}{dx} = x - x^3\left(1 + \frac{1}{3}\right) + x^5\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.}$$

ecundi termini

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + \text{etc.} = \frac{x}{1+xx}$$

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{3} + \text{etc.} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{1+xx},$$

quentes dabunt

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{1+xx},$$

quo erit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \text{etc.}}{1+xx} = \frac{\text{Arc. tang. } x}{1+xx},$$

nsequenter

$$t = \int \frac{dx}{1+xx} \int \frac{dx}{1+xx},$$

ius integrale

$$t = \frac{1}{2}(\text{Arc. tang. } x)^2.$$

nc sumto $x = 1$ erit

$$t = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\pi}{16} = \frac{\pi\pi}{32},$$

nsequenter

$$S = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{\pi\pi}{32} = \frac{3\pi\pi}{32}.$$

COROLLARIUM

Inventa hac summa si ipsam seriem propositam ita tractemus:

$$S = x - \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{x^5}{5}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.},$$

fiat

$$\frac{dS}{dx} = 1 - xx\left(1 - \frac{1}{3}\right) + x^4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \text{etc.},$$

nini primi dant

$$1 - xx + x^4 - x^6 + \text{etc.} = \frac{1}{1+xx},$$

ndi

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{xx}{1+xx},$$

tertii

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{x^4}{1+xx}$$

ideoque

$$\frac{dS}{dx}=\frac{1}{x(1+xx)}\int\frac{dx}{1-xx}.$$

Est vero

$$\frac{1}{x(1+xx)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+xx},$$

ergo

$$S=\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-xx}-\int\frac{xdx}{1+xx}\int\frac{dx}{1-xx}.$$

Cum igitur sit

$$\int\frac{dx}{1-xx}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\text{etc.},$$

erit

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-xx}=x+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}+\frac{x^7}{7^2}+\text{etc.}$$

Posito ergo $x=1$ erit

$$\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{1-xx}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{8}.$$

Quare, cum $S=\frac{3\pi\pi}{32}$, erit

$$\frac{3\pi\pi}{32}=\frac{\pi\pi}{8}-\int\frac{xdx}{1+xx}\int\frac{dx}{1-xx};$$

unde sequitur

$$\int\frac{xdx}{1+xx}\int\frac{dx}{1-xx}=\frac{\pi\pi}{32},$$

quem valorem non video quomodo directe erui posset.

PROBLEMA

Hanc seriem secundum numeros primos progredientem:

$$s = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \text{etc.},$$

i numeri primi formae $4n-1$ habent signum $+$, reliqui formae $4n+1$ signum $-$, in seriem convergentem convertere.

SOLUTIO

Hoc duplici modo fieri potest. Cum enim primo sit[1]) productum

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \text{ etc.} = 1,$$

i denominatores sunt numeri primi, numeratores vero pariter pares unitate l maiores vel minores, sequitur fore

$$s = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - 1\right) + \frac{1}{7}\left(1 - \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$
$$+ \frac{1}{11}\left(1 - \frac{4 \cdot 4 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \text{etc.}$$

inde cum sit[2])

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \text{ etc.} = 1,$$

e sequitur fore

$$s = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{5}\left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{\pi}{2} - 1\right)$$
$$- \frac{1}{11}\left(\frac{2 \cdot 6 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{13}\left(1 - \frac{2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \text{etc.},$$

ae ambae series manifesto valde convergunt.

---

1) Vide Commentationem 72 indicis ENESTROEMIANI, theorema 11, *LEONHARDI EULERI Opera nia*, vol. I14, p. 233. C. B.

2) Ibidem, theorema 14, loco citato p. 236. C. B.

THEOREMA

Posito $\frac{\pi}{4} = q$, si summae sequentium serierum ponantur

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} = Aq,$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.} = 2Bqq,$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.} = 4Cq^3,$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.} = 8Dq^4$$

etc.

coëfficientes ita a se invicem pendent, ut sit[1])

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = \frac{2AB}{4}, \quad D = \frac{2AC + BB}{6}, \quad E = \frac{2AD +}{8}$$

$$F = \frac{2AE + 2BD + CC}{10} \quad \text{etc.},$$

unde colliguntur isti valores:

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{3}, \quad E = \frac{5}{24}, \quad F = \frac{2}{15}, \quad G = \frac{61}{720},$$

etc.,

ubi insuper litterae seorsim per 1, 2, 4, 8, 16, 32 etc. multiplica
Hinc istos numeros ulterius continuavi[2]), quos ergo cum potestatib
sequenti modo repraesento. Prior columna valet pro potestatibus
posterior vero pro paribus:

---

1) Confer Commentationem 130 indicis Eneströmiani § 11, *Leonhardi Euleri*
vol. I14, p. 418. C. B.

2) Ibidem § 10, vol. I14, p. 416. C. B.

$$Aq = 1 \cdot q, \qquad Bq^2 = 1 \cdot 2q^2,$$

$$Cq^3 = \frac{1}{2} \cdot 4q^3, \qquad Dq^4 = \frac{1}{3} \cdot 8q^4,$$

$$Eq^5 = \frac{5}{8 \cdot 3} \cdot 16q^5, \qquad Fq^6 = \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot 32q^6,$$

$$Gq^7 = \frac{61}{16 \cdot 9 \cdot 5} \cdot 64q^7, \qquad Hq^8 = \frac{17}{9 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 128q^8,$$

$$Jq^9 = \frac{277}{128 \cdot 9 \cdot 7} \cdot 256q^9, \qquad Kq^{10} = \frac{2 \cdot 31}{81 \cdot 5 \cdot 7} \cdot 512q^{10},$$

$$Lq^{11} = \frac{19 \cdot 2659}{256 \cdot 81 \cdot 25 \cdot 7} \cdot 1024q^{11} \qquad Mq^{12} = \frac{2 \cdot 691}{81 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 11} \cdot 2048q^{12}$$

etc. etc.

Quodsi litterae posterioris columnae ordine dividantur per hos numero $2 \cdot 15$, $2 \cdot 63$ etc., prodeunt meae fractiones $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{945}$, $\frac{1}{9450}$ etc.[1])

Supra habuimus haec duo producta:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \text{etc.} = 1$$

et

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \text{etc.} = 1;$$

horum prius per posterius divisum dat

$$1 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{20}{18} \cdot \text{etc.} = 1.$$

Hae fractiones invertantur et sumantur logarithmi, eritque

$$l\frac{6}{4} + l\frac{6}{8} + l\frac{10}{12} + l\frac{14}{12} + \text{etc.} = 0.$$

Cum igitur sit

$$l\frac{6}{4} = l\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}, \qquad l\frac{6}{8} = l\frac{1-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}} \quad \text{etc.},$$

---

1) Ibidem § 29, loco citato p. 440. C. B.

evolutis logarithmis semissis dabit hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} \\ -\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7^7} \\ -\frac{1}{11} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{11^3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{11^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11^7} \\ +\frac{1}{13} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{13^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{13^7} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \text{etc.} =$$

Hinc ergo erit

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \text{etc.} \\ +\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{17^3} - \text{etc.}\right) \\ +\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} - \frac{1}{11^5} + \frac{1}{13^5} + \frac{1}{17^5} - \text{etc.}\right) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} =$$

Hinc porro

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \text{etc.} = S = \frac{1}{3}$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3}\right.$$

$$+ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} - \frac{1}{11^5}\right.$$

$$+ \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} - \frac{1}{11^7}\right.$$

etc.

Unde sequitur nostram seriem S aliquantillo maiorem ess

OBSERVATIO

Per similes rationes inveni, si omnes numeri primi in duas partes dividantur unitate differentes, ac pro numeris primis formae $8n+1$ vel $8n+3$ partes maiores pro numeratoribus, minores vero pro denominatoribus sumantur; pro his autem numeris $8n-1$ vel $8n-3$ minores pro numeratoribus et maiores pro denominatoribus sumantur, productum omnium harum fractionum erit $=1$, hoc est

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\text{etc.}=1.$$

COROLLARIUM

Transformatio seriei

$$S=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\text{etc.}$$

etiam hoc modo[1] referri potest:

1) Huius transformationis demonstratio EULERI more conficienda hoc exemplo illustretur: Sit

$$P=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{etc.};$$

erit

$$P\frac{1}{3^3}=\frac{1}{3^3}-\frac{1}{9^3}+\frac{1}{15^3}-\frac{1}{21^3}+\frac{1}{27^3}-\text{etc.},$$

unde oritur

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)=1+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{17^3}-\text{etc.}$$

Similiter, cum sit

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\frac{1}{5^3}=\frac{1}{5^3}+\frac{1}{25^3}-\frac{1}{35^3}-\frac{1}{55^3}+\frac{1}{65^3}+\text{etc.},$$

erit

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)=1-\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{17^3}-\frac{1}{19^3}-\text{etc.}$$

Porro est

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\frac{1}{7^3}=\frac{1}{7^3}-\frac{1}{49^3}-\frac{1}{77^3}+\frac{1}{91^3}+\frac{1}{119^3}-\text{etc.},$$

unde fiet

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\left(1+\frac{1}{7^3}\right)=1-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}+\frac{1}{17^3}-\frac{1}{19^3}-\frac{1}{23^3}+\text{etc.}$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\left(1+\frac{1}{7^3}\right)\text{etc.} - 1 + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} - \right.$$

$$+ \frac{1}{5}\left(Q\left(1+\frac{1}{3^5}\right)\left(1-\frac{1}{5^5}\right)\left(1+\frac{1}{7^5}\right)\text{etc.} - 1 + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{11^5} - \right.$$

$$+ \frac{1}{7}\left(R\left(1+\frac{1}{3^7}\right)\left(1-\frac{1}{5^7}\right)\left(1+\frac{1}{7^7}\right)\text{etc.} - 1 + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{11^7} - \right.$$

etc.,

ubi

$$P = 4Cq^3, \quad Q = 16Eq^5, \quad R = 64Gq^7 \quad \text{etc.}$$

Adversaria mathematica t. III, p. 104—107.

---

*Similibus operationibus pro singulis numeris primis imparibus institutis omnes seriei te*ter primum tollentur reperieturque

$$P\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right)\left(1+\frac{1}{7^3}\right) \text{etc.} = 1.$$

Confer e. g. demonstrationem theorematis 8 in Commentatione 72 indicis ENESTROEMIANI *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, vol. I14, p. 230. C. B.

INDEX NOMINUM

QUAE TOMIS 14, 15, 16 INSUNT